

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова праця

на правах рукопису

СИЗОН ІГОР АНАТОЛІЙОВИЧ

УДК: 537.63; 537.61; 537.622

ДИСЕРТАЦІЯ

**Розповсюдження нелінійних спінових хвиль в шаруватих
антиферромагнетиках, розділених метаповерхнями**

104 «Фізика та астрономія»

10 Природничі науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ І. А. Сизон

Науковий керівник ГОРОБЕЦЬ Оксана Юріївна, доктор ф-м.н., проф.

Київ – 2025

АНОТАЦІЯ

Сизон І. А. Розповсюдження нелінійних спінових хвиль в шаруватих антиферомагнетиках, розділених метаповерхнями. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття доктора філософії за спеціальністю 104 Фізика та астрономія. — Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, 2025.

Дисертаційна робота присвячена побудові граничних умов для вектора антиферомагнетизма на чотирьохпідгратковому інтерфейсі між двома двохпідгратковими антиферомагнетиками з одноосьовою магнітною анізотропією та дослідженню закономірностей розповсюдження нелінійних спінових хвиль в антиферомагнітних магنونних кристалах.

Динаміка векторів антиферомагнетизму та намагніченості в ефективних магнітних полях традиційно описується із застосуванням системи рівнянь Ландау–Ліфшиця. Знайдено граничну умову відносно вектору антиферомагнетизму, сумісну з сігма–моделлю.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути застосованими у теорії магنونних кристалів для двохпідграткових антиферомагнетиків з одноосьовою магнітною анізотропією та чотирьохпідгратковим інтерфейсом. Знайдені розподіли швидкостей нелінійних спінових хвиль та їх частоти можуть бути застосовані для конструювання надпотужних приладів передачі інформації.

У вступі показано актуальність теми дослідження, розглянуто зв'язок з сучасними дослідженнями та наведено короткий анонс дисертаційної роботи.

У першому розділі розглядається модель магنونного кристалу — система двох одноосьових двопідграткових напівнескінченних антиферомагнетиків (АФМ) зі спільним інтерфейсом (границя між АФМ) за наявності взаємодії Дзялошинського–Морії, причому, осі магнітної анізотропії обох АФМ спрямовані однаково, перпендикулярно до інтерфейсу. Вважаючи, що інтерфейс утворює чотирьохпідграткову систему, розглядаються можливі випадки для енергії інтерфейсу між АФМ, знаходяться формули локальних полів для си-

стеми рівнянь Ландау–Ліфшиця для кожного АФМ. Як результат, система рівнянь Ландау–Ліфшиця для кожного АФМ зводиться до еквівалентної системи відносно безрозмірного вектору намагніченості, а також безрозмірного вектору антиферромагнетизму (вектору Нееля) для кожного АФМ, що міститься у магнетонному кристалі.

Розділ складається з чотирьох підрозділів.

У першому підрозділі наведено опис досліджуваної моделі магнетонного кристалу.

У другому та третьому підрозділах розглядаються об'ємні густини енергії антиферромагнетиків та енергія інтерфейсу відповідно, які надалі використовуються в системах рівнянь Ландау–Ліфшиця для кожного АФМ.

У четвертому підрозділі вважаючи, що інтерфейс утворює чотирьохпідградкову систему, система рівнянь Ландау–Ліфшиця для кожного АФМ зводиться до еквівалентної системи рівнянь відносно безрозмірного вектору намагніченості та безрозмірного вектору антиферромагнетизму для кожного АФМ. Знайдено спрощення даних систем у випадку довгохвильового наближення і сігма-моделі, як наслідок, знайдено вигляд вектору намагніченості для кожного АФМ поза межами інтерфейсу. Знайдено систему граничних умов відносно векторів антиферромагнетизму, досліджено її сумісність з системою рівнянь Ландау–Ліфшиця, зокрема, для сігма-моделі, для випадка довгохвильового наближення.

Другий розділ присвячений знаходженню швидкостей нелінійних спінових хвиль у явному вигляді для кожного АФМ, які відповідають граничним умовам відносно векторів антиферромагнетизму для певного класу розв'язків системи рівнянь Ландау–Ліфшиця за умов сігма-моделі та довгохвильового наближення.

Розділ складається з трьох підрозділів.

У першому підрозділі знайдено граничні умови на інтерфейсах, досліджено їх частинні випадки.

У другому підрозділі система рівнянь Ландау–Ліфшиця для кожного АФМ за допомогою переходу до сферичної системи координат зводиться до

нелінійної системи відносно кутів (азимутального та полярного для векторів антиферромагнетизму) та відповідної швидкості спінової хвилі. При цьому клас розв'язків відповідних нелінійних систем досліджується методами, аналогічними тим, які застосовувались у дисертаційній роботі (Куліш В. В. *Магнітні спин-хвильові та одноелектронні оптичні властивості наносистем оболонкового типу*. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук. Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2019) при побудові розв'язків для моделі одноосьового феромагнетика.

У третьому підрозділі знайдено явні формули швидкостей спінових хвиль з використанням граничних умов відносно векторів антиферромагнетизму. При цьому, швидкості спінової хвилі знайдено для таких випадків в досліджуваному магнетонному кристалі: докритичне поширення хвилі намагніченості в обох АФМ, поширення надкритичної хвилі намагніченості в обох АФМ, розповсюдження докритичної хвилі намагніченості в одному АФМ та надкритичної хвилі намагніченості в іншому. Для кожного випадку обчислено період та частота відповідної спінової хвилі, знайдено умову застосовності довгохвильового наближення, проведено чисельні експерименти.

Кожен розділ доповнюється висновками, на завершення наведено загальні висновки до дисертаційної роботи.

Ключові слова: антиферромагнітний магнетонний кристал, спінова хвиля, рівняння Ландау–Ліфшиця, сігма модель, граничні умови, обмінна взаємодія, магнітна анізотропія, антиферромагнетик.

ABSTRACT

Syzon I. A. Propagation of nonlinear spin waves in layered antiferromagnets separated by metasurfaces. — Qualification work on manuscript rights.

The thesis for obtaining the degree of Doctor of Philosophy in speciality 104 Physics and astronomy. — National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, 2025.

The thesis is devoted to the construction of boundary conditions for the antiferromagnetism vector at a four-sublattice interface between two two-sublattice antiferromagnets with uniaxial magnetic anisotropy and the study of the laws of propagation of nonlinear spin waves in antiferromagnetic magnon crystals.

A dynamics of antiferromagnetism and magnetization vectors in effective magnetic fields is traditionally described using the Landau–Lifshitz system of equations. A boundary condition for the antiferromagnetism vector is found that is compatible with the sigma-model.

The manuscript is of a theoretical nature. The results obtained can be applied in the theory of magnon crystals for two-sublattice antiferromagnets with uniaxial magnetic anisotropy and a four-sublattice interface. The distributions of velocities of nonlinear spin waves and their frequencies found can be used to design high-power information transmission devices.

An introduction section shows the relevance of the research topic, discusses the connection with modern research, and provides a brief announcement of the thesis.

The first chapter considers the model of a magnon crystal — a system of two uniaxial two-sublattice semi-infinite antiferromagnets (AFMs) with a common interface (the boundary between the AFMs) in the presence of the Dzyaloshynski–Moriya interaction, and the magnetic anisotropy axes of both AFMs are directed equally, perpendicular to the interface. Assuming that the interface forms a four-sublattice system, possible cases for the interface energy between the AFMs are considered, and local field formulas for the system of Landau–Lifshitz equations for each AFM are found. As a result, the system of Landau–Lifshitz equations for each AFM is reduced to an equivalent system with respect to the di-

dimensionless magnetization vector, as well as the dimensionless antiferromagnetism vector (Néel vector) for each AFM contained in the magnon crystal.

The chapter consists of four subsections.

The first subsection provides a description of the studied magnon crystal model.

The second and third subsections consider the bulk energy densities of antiferromagnets and the interface energy, respectively, which are subsequently used in the Landau–Lifshitz equation systems for each AFM.

In the fourth subsection, considering that the interface forms a four-subgrid system, the system of Landau–Lifshitz equations for each AFM is reduced to an equivalent system of equations for the dimensionless magnetization vector and the dimensionless antiferromagnetism vector for each AFM. A simplification of these systems is found in the case of the long-wave approximation and the sigma-model, as a result, the form of the magnetization vector for each AFM outside the interface is found. A system of boundary conditions for the antiferromagnetism vectors is found, and its compatibility with the system of Landau–Lifshitz equations is investigated, in particular, for the sigma-model, for the case of the long-wave approximation.

The second chapter is devoted to finding the velocities of nonlinear spin waves in explicit form for each AFM, which correspond to the boundary conditions with respect to the antiferromagnetism vectors for a certain class of solutions of the Landau–Lifshitz equation system under the conditions of the sigma-model and the long-wave approximation.

The section consists of three subsections.

Boundary conditions at the interfaces are found and their special cases are investigated in the first subsection.

The system of Landau–Lifshitz equations for each AFM, by means of the transition to a spherical coordinate system, is reduced to a nonlinear system with respect to the angles (azimuthal and polar for the antiferromagnetism vectors) and the corresponding spin wave velocity by transitioning to a spherical coordinate system. At the same time, the class of solutions of the corresponding nonlinear

systems is investigated by methods similar to those used in the thesis (Kulish V.V. *Magnetic spin-wave and single-electron optical properties of shell-type nanosystems*. The thesis for obtaining the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences. National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, 2019), where solutions for the model of a uniaxial ferromagnet have been constructed.

Explicit formulas for the velocities of spin waves with use of boundary conditions relative to the vectors of antiferromagnetism are found in the third subsection. At the same time, the spin wave velocities were found for the following cases in the studied magnon crystal: subcritical propagation of the magnetization wave in both AFMs, propagation of the supercritical magnetization wave in both AFMs, propagation of the subcritical magnetization wave in one AFM and the supercritical magnetization wave in the other. For each case, the period and frequency of the corresponding spin wave were calculated, the condition for the applicability of the long-wave approximation was found, and numerical experiments were performed.

Each section is supplemented with conclusions, and at the end, general conclusions for the dissertation are given.

Keywords: antiferromagnetic magnonic crystal, spin wave, Landau-Lifshitz equations, sigma model, boundary conditions, exchange interaction, magnetic anisotropy, antiferromagnet.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Gorobets O.Yu., Kulish V.V., Syzon I.A., Theory of propagation of nonlinear spin wave through an antiferromagnetic magnonic crystal with four-sublattice interfaces. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2023. Vol. 587, Article ID: 171266. (Приналежність до бази Scopus і Web of Science)

2. Gorobets O.Yu., Kulish V.V., Syzon I.A., Provolovska D.V. Supercritical Propagation of Nonlinear Magnetization Wave Through an Antiferromagnetic Magnonic Crystal. *Vladymyrskyi I., Hillebrands B., Serha A., Makarov D., Prokopenko O. (eds) Functional Magnetic and Spintronic Nanomaterials. NATO 2023. NATO Science for Peace and Security Series B: Physics and Biophysics*. 2024. Dordrecht: Springer, P. 147–175. (Приналежність до бази Scopus)

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

3. Gorobets O.Yu., Kulish V.V., Syzon I.A., Provolovska D.V. Ultrafast propagation of nonlinear spin wave through an antiferromagnetic magnonic crystal. *Proceedings of the XIX international scientific conference «ELECTRONICS AND APPLIED PHYSICS APHYS 2023»*. 2023. Kyiv, Ukraine, October, 17–21, 2023, Taras Shevchenko National University of Kyiv Faculty of RadioPhysics, Electronics and Computer Systems, P. 21.

4. Syzon I., Gorobets O., Kulish V., Supercritical propagation of nonlinear magnetization wave through an antiferromagnetic magnonic crystal. *Book of Abstracts of Bogolyubov Kyiv Conference «Problems of Theoretical and Mathematical Physics» dedicated to the 115-th anniversary of the outstanding theoretician in physics and mathematics Mykola Bogolyubov, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics (Sections 1–4)*. 2024. Kyiv, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, 24–26 September 2024, P. 37.

ЗМІСТ

Вступ	11
Розділ 1. Граничні умови для параметрів порядку на чотирьохпідгратковому інтерфейсі між двома двохпідгратковими антиферромагнетиками з одноосьовою магнітною анізотропією	19
1.1 Модель магнонного кристалу	20
1.2 Об'ємні густини енергій антиферромагнетиків	22
1.3 Поверхнева густина енергії інтерфейсу	23
1.4 Система рівнянь Ландау–Ліфшиця для антиферромагнетиків в сігма-моделі з граничними умовами для вектора антиферромагнетизму	27
1.4.1 Обрахунок густин енергій та їх варіаційних похідних . .	28
1.4.2 Система рівнянь Ландау–Ліфшиця для антиферромагнетиків за умови довгохвильового наближення	34
1.4.3 Граничні умови для вектору антиферромагнетизму	35
Висновки до розділу 1	48
Розділ 2. Розв'язання системи рівнянь Ландау–Ліфшиця з використанням граничних умов для вектора антиферромагнетизму в антиферромагнітному магнонному кристалі	49
2.1 Граничні умови на інтерфейсах	50
2.2 Система рівнянь Ландау–Ліфшиця для антиферромагнетиків в сігма-моделі в сферичній системі координат для вектора антиферромагнетизму	51
2.3 Спектр нелінійних спінових хвиль в антиферромагнітному магнонному кристалі	69
2.3.1 Гранична умова відносно вектора антиферромагнетизму для розв'язку (2.17) системи Ландау–Ліфшиця	69

2.3.2	Випадок докритичного поширення хвилі намагніченості в обох АФМ	72
2.3.3	Випадок поширення надкритичної хвилі намагніченості в обох АФМ	90
2.3.4	Випадки розповсюдження докритичної хвилі намагніче- ності в одному АФМ та надкритичної хвилі намагніче- ності в іншому	95
Висновки до розділу 2		108
Висновки		110
Список використаних джерел		112
Додатки		126

ВСТУП

Актуальність теми. Спінові хвилі або, хвилі намагніченості в магнітоупорядкованих матеріалах (див., наприклад, [49]), є об'єктами інтенсивного дослідження протягом останніх десятиліть, як теоретичного спрямування, так і експериментального (див., наприклад, [21, 49–51, 53] та огляди літератури у них). Серед перспектив їх застосування — створення нових пристроїв передачі та зберігання інформації ([49, 54, 55, 58]), створення нових обчислювальних пристроїв [56–59] тощо. Крім того, нещодавно з'явилися нові галузі досліджень і технологій, які вивчають спінові хвилі, а саме: *магنونіка* (див., наприклад, [49, 50, 53]) і *спінтроніка* (див., наприклад, [60, 61]).

Спінові хвилі в антиферомагнітних матеріалах не є чисто теоретичною абстракцією, про що засвідчують експериментальні методи збудження та виявлення таких хвиль, які швидко розвиваються (див., наприклад, [64, 65]). Зокрема, дифузійне поширення некогерентних магنونів в антиферомагнетиках розглядається у роботах [66–68]. Еванесцентні спін-хвильові моди розглядаються, наприклад, у [69]. Випромінювання та виявлення хвильового пакета нанометрового масштабу когерентних магنونів, що поширюються в антиферомагнітному DyFeO_3 , нещодавно досліджено у [94]. Антиферомагнітна магنونіка та спінтроніка є галузями досліджень, які інтенсивно розвиваються, де магтони та їхній спін використовуються як носії відповідної інформації. Відкриття методів застосування вектора Нееля, або вектора антиферомагнітизму, змістило увагу дослідження АФМ матеріалів від фундаментального спрямування в бік безпосереднього практичного застосування. Феромагнітні і антиферомагнітні матеріали дозволяють маніпулювати магнонами (квантами спінових хвиль), передавати та обробляти інформацію з низькими енергетичними витратами та без розсіювання тепла за рахунок омічних втрат [72–74]. Однак існують переваги антиферомагнітних матеріалів (АФМ) для застосування в магنونіці та спінтроніці порівняно з феромагнітними (ФМ). Наприклад, АФМ матеріали нечутливі до зовнішніх магнітних збурень [75]. АФМ

не мають магнітних полів розсіювання (див., наприклад, [76]). Типовий часовий масштаб, пов'язаний зі змінами в магнітній структурі АФМ, на кілька порядків менший, ніж той, що пов'язаний з ФМ. Таким чином, ФМ-метали мають внутрішнє обмеження, що вони не можуть працювати в діапазоні частот вище 100 ГГц (див., наприклад, [77]), тоді як надшвидка динаміка антиферомагнетиків робить можливою роботу пристрою у терагерцевому діапазоні частот [75, 76, 78, 79]. АФМ може поєднувати спін-хвильову логіку з частотами ТГц, сприяти значному зменшенню розмірів пристроїв до нанорозмірів [94] та проджувати високі швидкості розповсюдження [72, 81, 94]. АФМ спінові хвилі мають подвійну поляризацію через наявність двох протилежних магнітних підґраток. Полярність АФМ спінових хвиль визначає новий ступінь свободи кодування інформації (заданої магнетною поляризацією) у доповненні до амплітуди та фази [82–84]. Поляризацією спінової хвилі можна маніпулювати взаємодією Дзялошинського–Морія (ДМВ, антисиметрична складова обмінної взаємодії), індукованою електричним полем, і магнітною анізотропією [85]. Колінеарні АФМ мають дві вироджені власні моди спінової хвилі протилежної хіральності [86]. Їх часто називають право- та лівосторонніми модами відповідно до прецесійної спрямованості вектора Нееля. Магнітохіральність є вирішальним інгредієнтом у візуалізації майбутніх спін-хвильових логічних пристроїв [87]. АФМ ізоспін (внутрішній ступінь свободи для АФМ спінових хвиль, які несуть спін, що забезпечується наявністю як лівої, так і правої хіральності) пропонує різноманітні застосування в різних напрямках [88]. Мала намагніченість АФМ, що виникає через збурення вектора Нееля, може бути використана для впливу на динаміку магнітних текстур і спінових струмів [84]. Крім того, АФМ-магнони можуть пов'язуватися з кутовим моментом, що переноситься електронами [89], [90], фотонами [91], [92], [93] та іншими носіями спіну. З точки зору спітроніки та магнетіки, АФМ мають широку спектральну смугу частот [94] і різноманітні функціональні можливості для інтеграції з феромагнетиками [76]. Нарешті, антиферомагнетизм спостерігається частіше і при значно загальніших умовах, ніж феромагнетизм. Зокрема, антиферомагнетизм спостерігається навіть

у напівпровідниках при кімнатній температурі [95].

Модуляцію фронту спінової хвилі можна здійснити шляхом введення скіrmіонів і скіrmіоноподібних структур. Відомі методи створення антиферомагнітних скіrmіонів: інжекція вертикального спін-поляризованого струму в нанодиск з основним станом АФМ; перетворення АФМ-пари доменних стінок у з'єднанні нанодроту [96]. Проте спостереження магнітних скіrmіонів проводиться, переважно, для феромагнітних матеріалів. Лише кілька робіт (див., наприклад, [97]) присвячені експериментальному спостереженню антиферомагнітних скіrmіонів. При цьому антиферомагнітні скіrmіони мають ряд переваг у порівнянні з феромагнітними. Зокрема, для феромагнітних скіrmіонів їхні розміри обмежені кількома десятками нанометрів при кімнатній температурі, для їх стабілізації потрібне зовнішнє магнітне поле, їх рух відхиляється від прямолінійної траєкторії вздовж струму, а їх топологічне затухання обмежує їх швидкість до 100 м/с [97]. Отже, дослідження в області антиферомагнітних скіrmіонів є перспективними, хоча й складними. [97].

Магنونні кристали — періодично структуровані магнітні матеріали — стали об'єктом інтенсивних досліджень протягом останніх десятиліть. Вони мають унікальні спін-хвильові властивості [98] (наприклад, кристалоподібні заборонені зони в спектрах спінових хвиль), що робить їх перспективними новими матеріалами для магنونіки. Недавні експериментальні дослідження способів керування характеристиками спінової хвилі в магنونних кристалах включають, наприклад, [99], [100]. Зокрема, останнім часом актуальною та популярною темою досліджень стають скіrmіони в магنونних кристалах [101]. Подальший розвиток магنونіки АФМ потребує більш глибокого теоретичного підґрунтя для поширення спінової хвилі в магنونних кристалах АФМ, які є основними частотно-швидкісними фільтрами для спінових хвиль як і їх ФМ аналоги.

Граничні умови на ФМ/ФМ інтерфейсі [102] є необхідними для моделювання поширення спінової хвилі в ФМ магنونних кристалах [103]. Ось чому в магنونіці ФМ було зроблено багато кроків для побудови більш загальних граничних умов на інтерфейсі ФМ/ФМ [104–107], враховуючи не тільки одно-

рідний обмін між ФМ на межі розділу, але й власну магнітну анізотропію на межі розділу та її скінченну товщину [102]. Те саме стосується граничних умов на інтерфейсах АФМ/ФМ для магنونних кристалів АФМ–ФМ і на інтерфейсах АФМ/АФМ відповідно для моделювання поширення спінової хвилі в магنونних кристалах АФМ.

Магнітне впорядкування інтерфейсів ФМ/ФМ і АФМ/ФМ (від повністю некомпенсованого інтерфейсу до повністю компенсованого) було детально вивчено в останніх дослідженнях. Наприклад, в роботах [108, 109] вивчаються магнітні властивості подвійних шарів Со/Ni після плазмового окислення, при цьому, магнітні властивості NiO/Со/Pt досліджуються як функцію товщини шару Со). Це включає, зокрема, обмінне зміщення, або пінінг в системах ФМ/АФМ через його технологічну важливість у магнітних пристроях на основі спінового клапана. Подвійні шари ФМ/АФМ тепер зазвичай інтегровані в спінтронні пристрої. Подальший розвиток антиферромагнітної магنونіки, з іншого боку, вимагає нових специфічних досліджень — зокрема, загальних граничних умов для параметра порядку на межі АФМ/АФМ з урахуванням обмінного зміщення між магнітними підґратками (у цьому випадку воно проявляється у зв'язку між двома магнітними підґратками, що індукує значний зсув, наприклад, коерцитивного поля) обох АФМ. Відомі граничні умови описують АФМ–вакуумний інтерфейс [110] у той час, як інформація про магнітне впорядкування АФМ/АФМ–інтерфейсу наразі слабо досліджена. У роботі [111] магнітний зв'язок для АФМ/АФМ інтерфейсу вивчався для прототипу двошарової системи СоО–NiO. Тим не менш, загальні граничні умови для рівнянь Ландау–Ліфшица з урахуванням ступеня некомпенсації [112], [113] інтерфейсу АФМ/АФМ на даний момент ще не досліджувались. Отже, їх вивчення має актуальне значення для подальших досліджень.

У дисертаційному дослідженні розглядаються нелінійні спінові хвилі в АФМ–магنونному кристалі з взаємодією Дзялошинського–Морії. Для цього в сігма–моделі використовуються рівняння Ландау–Ліфшица для двопідґраткової АФМ (в якій намагніченість вважається набагато меншою, ніж величи-

на вектора Нееля). В результаті отримано (див. [1, 3]) допустимий дискретний набір частот і допустимий дискретний набір швидкостей для розглянутих спінових хвиль. У процесі дослідження виводяться граничні умови для вектора Нееля на межі розділу двох АФМ з урахуванням обмінної взаємодії між магнітними підґратками для обох АФМ. Ці граничні умови, зокрема, застосовуються як для повністю некомпенсованого інтерфейсу, так і для повністю компенсованого для цілей ілюстрації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» в рамках тематики наукової школи «Магнетизм».

Мета дослідження: вивести граничні умови для рівняння Ландау–Ліфшиця в сігма-моделі на інтерфейсі між двома двома підґратковими антиферромагнетиками та знайти закономірності розповсюдження нелінійних спінових хвиль в антиферромагнітному магнетному кристалі з урахуванням зазначених граничних умов.

Завдання дослідження полягають в:

- отриманні граничних умов для рівняння Ландау–Ліфшиця в сігма-моделі на інтерфейсі між двома двома підґратковими антиферромагнетиками;
- знаходженні закономірностей розповсюдження нелінійних спінових хвиль в антиферромагнітному магнетному кристалі зі швидкістю, що не перевищує критичну швидкість для лінійних спінових хвиль в обох антиферромагнітних матеріалах, з яких складається антиферромагнітний магнетний кристал (тобто в докритичному режимі);
- отриманні закономірностей розповсюдження нелінійних спінових хвиль в антиферромагнітному магнетному кристалі зі швидкістю, що перевищує критичну швидкість для лінійних спінових хвиль тільки в одному з антиферромагнетних матеріалів, з яких складається антиферромагнітний магнетний кристал (тобто в змішаному — до- та надкритичному режимі);
- знаходженні закономірності розповсюдження нелінійних спінових хвиль в антиферромагнітному магнетному кристалі зі швидкістю, що переви-

щує критичну швидкість для лінійних спінових хвиль в обох антиферомагнітних матеріалах, з яких складається антиферомагнітний магنونний кристал (тобто в надкритичному режимі).

Об'єкт дослідження: двошарова наноструктура типу антиферомагнетик-антиферомагнетик з одноосною магнітною анізотропією, антиферомагнітний магنونний кристал.

Предмет дослідження: граничні умови для вектора антиферомагнетизма на чотирьохпідгратковому інтерфейсі між двома двохпідгратковими антиферомагнетиками з одноосьовою магнітною анізотропією, закономірності розповсюдження нелінійних спінових хвиль в антиферомагнітних магنونних кристалах.

Методи дослідження: методи теоретичного дослідження: аналіз, моделювання, сходження від абстрактного до конкретного, формалізація, ідеалізація, логічний метод. Також було застосовано спеціальні методи, а саме: варіаційне інтегральне та диференціальне обчислення, методи математичного аналізу, методи математичної фізики, методи теорії диференціальних рівнянь. Метод мінімізації загальної енергії середовища було застосовано для виведення граничних умов на інтерфейсі між двома антимагнітними матеріалами. Динаміка векторів антиферомагнетизму та намагніченості в ефективних магнітних полях традиційно описана із застосуванням рівнянь Ландау–Ліфшиця. При цьому, ефективне поле — це варіаційна (функціональна) похідна від енергії феромагнетика по вектору намагніченості, або антиферомагнетизма. Для дослідження нелінійних спінових хвиль в антиферомагнітному магنونному кристалі використано сігма-модель. Комп'ютерне моделювання фізичних процесів з чисельними результатами проводилось за допомогою мови програмування Python для графічної візуалізації результатів дисертаційної роботи.

Наукова новизна отриманих результатів. Наукову новизну визначають, зокрема, такі результати дисертації:

1. Вперше отримано граничні умови для рівняння Ландау–Ліфшиця в сігма-моделі на інтерфейсі між двома двох підгратковими антиферомагнети-

ками.

2. Вперше розраховано швидкості нелінійних спінових хвиль в антиферомагнітному магнонному кристалі у випадку, коли швидкість не перевищує критичну швидкість для лінійних спінових хвиль в обох антиферомагнітних матеріалах, з яких складається антиферомагнітний магнонний кристал (тобто в докритичному режимі).

3. Вперше розраховано швидкості нелінійних спінових хвиль в антиферомагнітному магнонному кристалі у випадку, коли швидкість не перевищує критичну швидкість для лінійних спінових хвиль тільки в одному з антиферомагнітних матеріалів, з яких складається антиферомагнітний магнонний кристал (тобто в змішаному — до- та надкритичному режимі).

4. Вперше розраховано швидкості нелінійних спінових хвиль в антиферомагнітному магнонному кристалі у випадку, коли швидкість перевищує критичну швидкість для лінійних спінових хвиль в обох антиферомагнітних матеріалах, з яких складається антиферомагнітний магнонний кристал (тобто в надкритичному режимі).

5. Вперше знайдено умови щодо типу магнітної анізотропії двох антиферомагнітних матеріалів, з яких складається антиферомагнітний магнонний кристал, для реалізації докритичного, надкритичного та змішаного режимів розповсюдження нелінійної спінової хвилі.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути застосованими у теорії магнонних кристалів для двохпідграткових антиферомагнетиків з одноосьовою магнітною анізотропією та чотирьохпідгратковим інтерфейсом. Знайдені розподіли нелінійних швидкостей та їх частоти можуть бути застосовані для конструювання надпотужних приладів передачі інформації.

Особистий внесок здобувача. У дисертації використані матеріали досліджень, проведених спільно з: 1) О. Ю. Горобець та В. В. Кулішом [1], 2) О. Ю. Горобець, В. В. Кулішом та Д. В. Проволоцькою [3], де здобувач здійснював аналітичні розрахунки та побудову графіків, брав участь в обговоренні результатів та формулюванні висновків.

Апробація результатів. Основні положення дисертації оприлюднені на науково-практичних конференціях: *міжнародних*: «ELECTRONICS AND APPLIED PHYSICS APHYS 2023» (Київ, 2023), Bogolyubov Kyiv Conference «Problems of Theoretical and Mathematical Physics» (Київ, 2024); *наукових семінарах*: кафедри загальної фізики та моделювання фізичних процесів Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» та кафедри загальної фізики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Публікації. Результати дисертації викладено у 4 наукових публікаціях, з яких 2 статті у журналах, що входять до наукометричних баз Scopus та/або Web of Science, 2 у збірниках та матеріалах міжнародних конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, двох розділів, розподілених на підрозділи, загальних висновків, списку використаних джерел (132 найменування, з них 118 іноземною мовою) та шістьох додатків, перший з яких містить перелік умовних позначень та скорочень, другий та третій — математичні перетворення та роз'яснення відповідних фактів, четвертий — список параметрів для феромагнітних матеріалів, п'ятий — програму на мові Python для візуалізації результатів у випадку докритичного поширення хвилі намагніченості в обох антиферомагнетиках, шостий — список публікацій здобувача за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації. Загальний обсяг дисертації становить 154 сторінки, з яких 101 — основного тексту; робота містить 16 рисунків (16 у основній частині та 0 у додатках).

Подяки. Висловлюю щире подяку науковому керівнику професору О. Ю. Горобець за постановку задачі, корисні поради та зауваження.

РОЗДІЛ 1

ГРАНИЧНІ УМОВИ ДЛЯ ПАРАМЕТРІВ ПОРЯДКУ НА ЧОТИРИПІДГРАДКОВОМУ ІНТЕРФЕЙСІ МІЖ ДВОМА ДВОХПІДГРАДКОВИМИ АНТИФЕРОМАГНЕТИКАМИ З ОДНООСЬОВОЮ АНІЗОТРОПІЄЮ

У даному розділі розглядається модель магнетонного кристалу — система двох одноосьових двопідграткових напівнескінченних антиферромагнетиків (АФМ) зі спільним інтерфейсом (границя між АФМ) за наявності взаємодії Дзялошинського–Морії, причому, осі магнітної анізотропії обох АФМ спрямовані однаково, перпендикулярно до інтерфейсу. Вважаючи, що інтерфейс утворює чотирихпідграткову систему, розглядаються можливі випадки для енергії інтерфейсу між АФМ, знаходяться формули локальних полів для системи рівнянь Ландау–Ліфшиця для кожного АФМ. Як результат, система рівнянь Ландау–Ліфшиця для кожного АФМ зводиться до еквівалентної системи відносно безрозмірного вектору намагніченості $\vec{m}_i$, а також безрозмірного вектору антиферромагнетизму (вектору Нееля) $\vec{l}_i$ для кожного АФМ з номером $i \in \{1, 2\}$.

Розділ складається з чотирьох підрозділів.

У першому підрозділі наведено опис досліджуваної моделі магнетонного кристалу.

У другому та третьому підрозділах розглядаються об'ємні густини енергії антиферромагнетиків та енергія інтерфейсу відповідно, які надалі використовуються в системах рівнянь Ландау–Ліфшиця для кожного АФМ.

У четвертому підрозділі вважаючи, що інтерфейс утворює чотирихпідграткову систему, система рівнянь Ландау–Ліфшиця для кожного АФМ зводиться до еквівалентної системи рівнянь відносно безрозмірного вектору намагніченості та безрозмірного вектору антиферромагнетизму для кожного АФМ. Знайдено спрощення даних систем у випадку довгохвильового наближення і сігма-моделі, як наслідок, знайдено вигляд вектору намагніченості для кожного АФМ поза межами інтерфейсу. Знайдено систему граничних

умов відносно векторів антиферромагнетизму, досліджено її сумісність з системою рівнянь Ландау–Ліфшиця, зокрема, для сігма-моделі, для випадка довгохвильового наближення.

1.1 Модель магнонного кристалу

Розглянемо границю (інтерфейс) між двома одноосьовими двопідградковими антиферромагнетиками (далі — АФМ) за наявності взаємодії Дзялошинського–Морії (див., наприклад, [36], [37], [32, С. 103–104], [38], [46–48]). Вісь магнітної анізотропії обох АФМ спрямовано однаково, перпендикулярно до інтерфейсу (зауважимо, що різні моделі для одного двопідградкового антиферомогнетика розглядаються, наприклад, в монографії [32] на стор. 90–92).

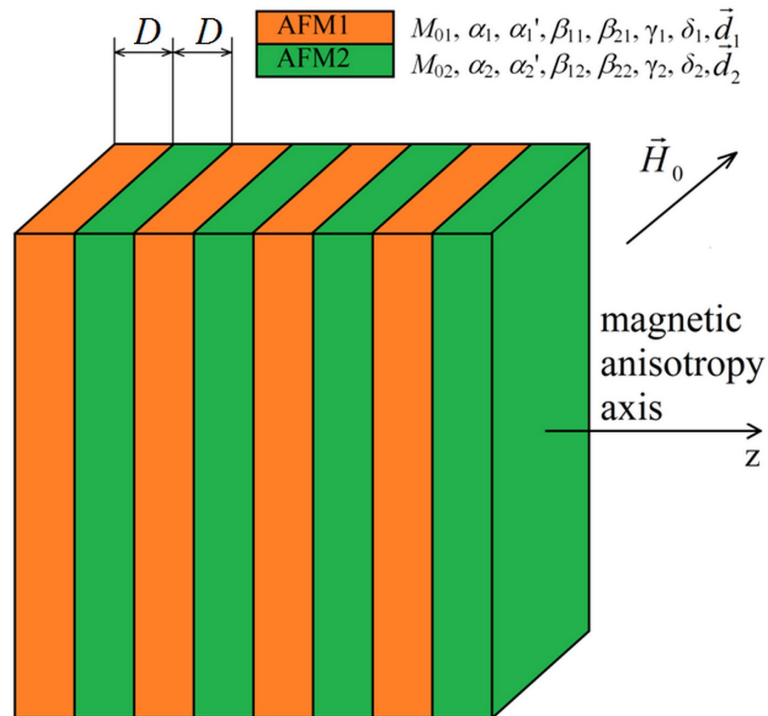


Рис. 1.1: Модель магнонного кристалу, який досліджується

Нехай всюди в обох АФМ, крім області інтерфейсу, густина магнітного моменту підградек ($\vec{M}_1^{(1)}$ та $\vec{M}_2^{(1)}$ для першого АФМ, $\vec{M}_1^{(2)}$ та $\vec{M}_2^{(2)}$ — для другого АФМ) є наближено однорідною в межах одного АФМ, а також

однаковою за модулем

$$\left| \vec{M}_1^{(i)} \right| = \left| \vec{M}_2^{(i)} \right|, i = 1, 2,$$

та протилежною за напрямком в межах одного АФМ. Таким чином, вектор намагніченості обох АФМ, $\vec{M}^{(i)} = \vec{M}_1^{(i)} + \vec{M}_2^{(i)}$ ($i = 1, 2$, — номер АФМ), можна вважати малим:

$$\left| \vec{M}^{(i)} \right| \ll M_{0i} := \frac{\left| \vec{M}_1^{(i)} \right| + \left| \vec{M}_2^{(i)} \right|}{2}, i = 1, 2.$$

Зауважимо, що наведені формули застосовні для АФМ в основному стані.

Відповідно, для вектору антиферромагнетизму (вектор Нееля) $\vec{L}^{(i)} = \vec{M}_1^{(i)} - \vec{M}_2^{(i)}$ (легко встановити, що $\left| \vec{L}^{(i)} \right| = \left| \vec{M}_1^{(i)} \right| + \left| \vec{M}_2^{(i)} \right|$, $i = 1, 2$), буде, очевидно, виконуватись співвідношення

$$\left| \vec{M}^{(i)} \right| \ll \left| \vec{L}^{(i)} \right|, i = 1, 2.$$

Константи анізотропії для АФМ з номером $i \in \{1, 2\}$ позначимо через β_{1i} та β_{2i} відповідно, неоднорідні обмінні константи — α_i та α'_i ($\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$); константу енергії однорідного обміну — δ_i ; гіромагнітне відношення γ (див., наприклад, [30], с. 10) вважаємо відомим.

Врахуємо також взаємодію Дзялошинського–Морії (ВДМ), ввівши для АФМ з номером i вектор $\vec{d}_i$ Дзялошинського–Морії ($i = 1, 2$). Товщину перехідної області між двома АФМ (яка представляє собою власне інтерфейс) позначимо δ_0 . Гіромагнітне відношення обох АФМ γ вважаємо однаковим та відомим: $\gamma \approx \frac{e g_e}{2 m_e} \approx \frac{e}{m_e} \approx 175,8$ ГГц/Тл, нехтуючи спостережним експериментально відхиленням від цієї величини для ряду магнітовпорядкованих матеріалів, де $g_e \approx 2$ — фактор Ланде електрона, e — елементарний заряд, m_e — маса електрона (зокрема, відомо, що для ферромагнітного нанодроту з $\text{Ni}_{80}\text{Fe}_{20}$ гіромагнітне відношення складає 184.7 ГГц/Тл, з $\text{Ni}_{65}\text{Fe}_{35}$ —

165.5 ГГц/Тл [5]; у той час як для суцільного зразку $\text{Ni}_{65}\text{Fe}_{35}$ гіромагнітне відношення становить 167.2 ГГц/Тл [5].)

Введемо безрозмірний вектор намагніченості $\vec{m}_i$, а також безрозмірний вектор антиферромагнетизму (вектор Нееля) $\vec{l}_i$ для кожного АФМ:

$$\vec{m}_i = \frac{\vec{M}_1^{(i)} + \vec{M}_2^{(i)}}{2M_{0i}}, \quad \vec{l}_i = \frac{\vec{M}_1^{(i)} - \vec{M}_2^{(i)}}{2M_{0i}}, \quad i = 1, 2. \quad (1.1)$$

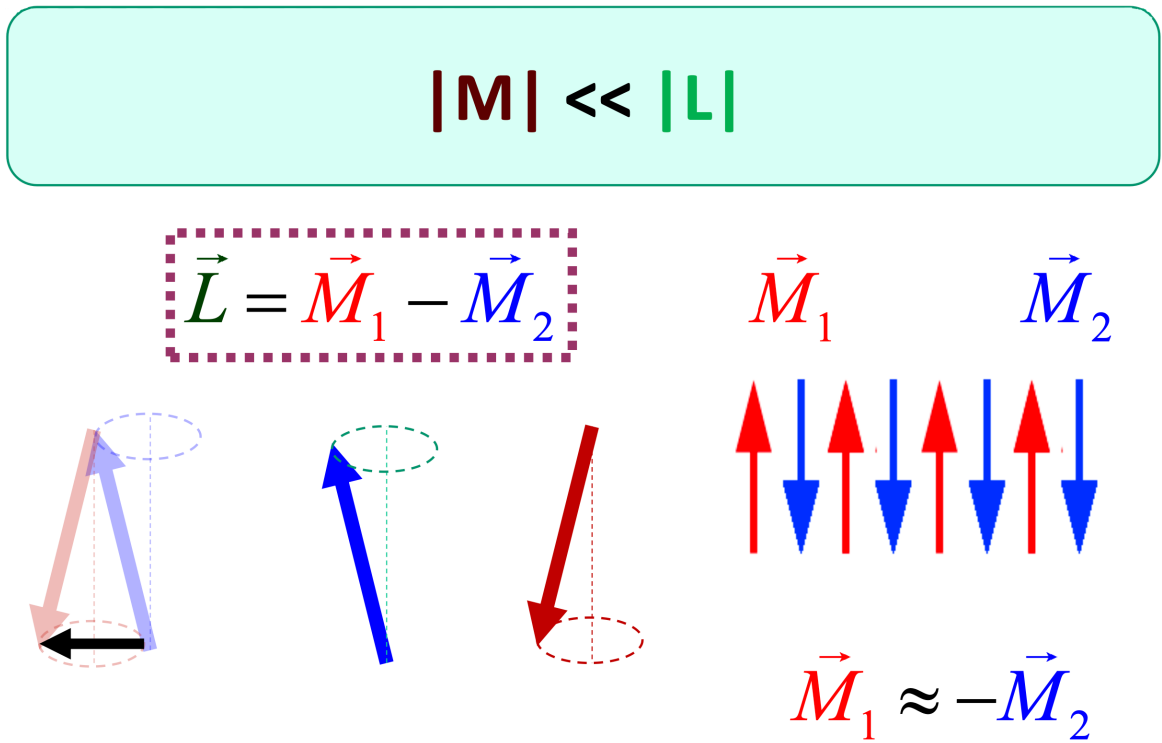


Рис. 1.2: Вектор Нееля у періодичних мультишарових наноструктурах типу АФМ–АФМ з одноосною магнітною анізотропією

1.2 Об'ємні густини енергій антиферромагнетиків

Застосуємо відомий вираз для енергії АФМ з урахуванням взаємодії Дзялошинського–Морії, а саме

$$W_i = \int dV \left(\frac{\delta_i}{2} \left(\vec{M}^{(i)} \right)^2 + \frac{\alpha_i}{2} \sum_j \left(\frac{\partial \vec{L}^{(i)}}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\alpha'_i}{2} \sum_j \left(\frac{\partial \vec{M}^{(i)}}{\partial x_j} \right)^2 - \right. \quad (1.2) \\ \left. - \frac{1}{2} \beta_{1i} \left(L_z^{(i)} \right)^2 - \frac{1}{2} \beta_{2i} \left(M_z^{(i)} \right)^2 + \vec{d}_i \left[\vec{M}^{(i)} \times \vec{L}^{(i)} \right] - \vec{M}^{(i)} \cdot \vec{H}_0 \right),$$

(див., наприклад, [7]), де $\vec{H}_0$ — зовнішнє магнітне поле, в якому знаходяться обидва АФМ (вважається однорідним), $\vec{L}^{(i)} = \vec{M}_i^{(1)} - \vec{M}_i^{(2)}$ — вектор антиферромагнетизму АФМ з номером $i \in \{1, 2\}$, вісь Oz спрямовано уздовж спільної осі магнітної анізотропії двох АФМ, а інтегрування відбувається по всьому об'єму АФМ.

Перейдемо в останньому виразі до безрозмірних $\vec{m}_i$, $\vec{l}_i$, $i = 1, 2$. В результаті отримаємо

$$W_i = 4 (M_{0i})^2 \int dV \left(\frac{\delta_i}{2} (\vec{m}_i)^2 + \frac{\alpha_i}{2} (\vec{\nabla} \vec{l}_i)^2 + \frac{\alpha'_i}{2} (\vec{\nabla} \vec{m}_i)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \beta_{1i} (l_{iz})^2 + \frac{1}{2} \beta_{2i} (m_{iz})^2 + \vec{d}_i [\vec{m}_i \times \vec{l}_i] - \vec{m}_i \cdot \vec{h}_{0i} \right), i = 1, 2, \quad (1.3)$$

де $\vec{h}_{0i} = \vec{H}_0 / (2M_{0i})$, причому, для зручності розрахунків обрано інший (по відношенню до (1.2)) знак констант одноосьової анізотропії для легкоосьового та легкоплощинного антиферромагнетиків.

З формули (1.3), одержуємо, що об'ємна густини w_i енергії i -го АФМ визначається рівністю

$$w_i = 4 (M_{0i})^2 \left(\frac{\delta_i}{2} (\vec{m}_i)^2 + \frac{\alpha_i}{2} (\vec{\nabla} \vec{l}_i)^2 + \frac{\alpha'_i}{2} (\vec{\nabla} \vec{m}_i)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \beta_{1i} (l_{iz})^2 + \frac{1}{2} \beta_{2i} (m_{iz})^2 + \vec{d}_i [\vec{m}_i \times \vec{l}_i] - \vec{m}_i \cdot \vec{h}_{0i} \right), i = 1, 2, \quad (1.4)$$

1.3 Поверхнева густина енергії інтерфейсу

Для знаходження енергії інтерфейсу узагальнимо відому модель, згідно якої границя між двома ферромагнетиками може бути описана як двопідграткова система. Обидва ферромагнетики вважаються одноосьовими, з віссю магнітної анізотропії, що спрямована ортогонально до плоского інтерфейсу. Тоді (див., наприклад, [12–14]) енергію інтерфейсу між двома ферромагнетиками (з рівноважними намагніченостями $\vec{M}_1^{FM}$, $\vec{M}_2^{FM}$) можна записати у вигляді

$$W_S^{FM} = \int dV \delta(z) A_{FM} \vec{M}_1^{FM} \vec{M}_2^{FM},$$

де A_{FM} — константа однорідного обміну між ґратками ферромагнетиків, вісь Oz спрямовано уздовж осі магнітної анізотропії обох ферромагнетиків (нор-

мально до площини інтерфейсу), інтегрування ведеться по всій області інтерфейсу (що вважається таким, який має малу, але скінчену товщину). Товщина інтерфейсу в зазначеній моделі вважається набагато меншою за довжину спінової хвилі. Коректність даної моделі підтверджується багатьма результатами чисельних моделювань (див., наприклад, [12–16]).

Застосуємо аналогічну модель до досліджуваної границі між антиферомагнетиками. Відповідно, ця границя може бути представлена як чотирипідграткова система, а її енергія — аналогічно описаного вище підходу — може бути записана у вигляді

$$W_S = \int dV \delta(z) \left(A_{11} \vec{M}_1^{(1)} \vec{M}_1^{(2)} + A_{12} \vec{M}_1^{(1)} \vec{M}_2^{(2)} + \right. \\ \left. + A_{21} \vec{M}_2^{(1)} \vec{M}_1^{(2)} + A_{22} \vec{M}_2^{(1)} \vec{M}_2^{(2)} \right), \quad (1.5)$$

де A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} — константи однорідного обміну між підгратками різних АФМ в інтерфейсі, вісь Oz спрямовано уздовж осі магнітної анізотропії обох АФМ (нормально до площини інтерфейсу).

Підставляючи рівності

$$\vec{M}_1^{(i)} = M_{0i} \left(\vec{m}_i + \vec{l}_i \right), \quad \vec{M}_i^{(2)} = M_{0i} \left(\vec{m}_i - \vec{l}_i \right), \quad i = 1, 2,$$

(які є наслідками (1.1)) у співвідношення (1.5), перетворимо

$$W_S = \int dV \delta(z) M_{01} M_{02} \left(A_{11} \left(\vec{m}_1 + \vec{l}_1 \right) \left(\vec{m}_2 + \vec{l}_2 \right) + \right. \\ \left. + A_{12} \left(\vec{m}_1 + \vec{l}_1 \right) \left(\vec{m}_2 - \vec{l}_2 \right) + \right. \\ \left. + A_{21} \left(\vec{m}_1 - \vec{l}_1 \right) \left(\vec{m}_2 + \vec{l}_2 \right) + A_{22} \left(\vec{m}_1 - \vec{l}_1 \right) \left(\vec{m}_2 - \vec{l}_2 \right) \right).$$

Звідси остаточно отримуємо

$$W_S = \int dV \delta(z) M_{01} M_{02} \left(a_{mm} \vec{m}_1 \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{m}_1 \vec{l}_2 + a_{lm} \vec{l}_1 \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_1 \vec{l}_2 \right), \quad (1.6)$$

де комбінації констант визначаються рівностями:

$$a_{mm} = A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}, \quad a_{lm} = A_{11} - A_{12} + A_{21} - A_{22}, \\ a_{ml} = A_{11} + A_{12} - A_{21} - A_{22}, \quad a_{ll} = A_{11} - A_{12} - A_{21} + A_{22}. \quad (1.7)$$

З (1.6), маємо рівність для поверхневої густини енергії інтерфейсу:

$$w_S = \delta(z) M_{01} M_{02} \left(a_{mm} \vec{m}_1 \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{m}_1 \vec{l}_2 + a_{lm} \vec{l}_1 \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_1 \vec{l}_2 \right). \quad (1.8)$$

З рівності (1.6) випливає також, що оскільки $|\vec{m}_i| \ll |\vec{l}_i|$, $i = 1, 2$, в сігма моделі, то в першому випадку при

$$a_{ll} \approx a_{lm} \approx a_{ml} \approx a_{mm} \neq 0$$

у виразі (1.6) можна нехтувати першими трьома доданками. Тобто

$$a_{ll} \vec{l}_1 \vec{l}_2 \geq a_{mm} \vec{m}_1 \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{m}_1 \vec{l}_2 + a_{lm} \vec{l}_1 \vec{m}_2 \approx a_{ll} \vec{l}_1 \vec{l}_2.$$

Аналіз показує, що $a_{mm} \approx a_{ml} \approx a_{lm} \approx a_{ll}$ є частковим випадком. Справді, з визначення цих констант (1.7) (a_{mm} містить суму обмінних констант, а всі інші комбінації — по дві різниці) та того факту, що константи однорідного обміну A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} є додатними, випливає, що $a_{mm} > \max\{|a_{ml}|, |a_{lm}|, |a_{ll}|\}$. При цьому якщо усі чотори константи однорідного об'єму є одного порядку

$$A_{11} \sim A_{12} \sim A_{21} \sim A_{22},$$

то

$$a_{mm} > \max\{|a_{ml}|, |a_{lm}|, |a_{ll}|\},$$

тому доданок $a_{mm} \vec{m}_1 \vec{m}_2$ не може бути знехтуваним, незважаючи на те, що $|\vec{m}_i| \ll |\vec{l}_i|$, $i = 1, 2$.

Якщо при цьому $|a_{ml}|$, $|a_{lm}|$ та $|a_{ll}|$ є одного порядку або $|a_{ll}| \gg \max\{|a_{ml}|, |a_{lm}|\}$, то доданки $a_{ml} \vec{m}_1 \vec{l}_2$, $a_{lm} \vec{l}_1 \vec{m}_2$ можна знехтувати в силу умов $|\vec{m}_i| \ll |\vec{l}_i|$, $i = 1, 2$, тоді маємо

$$a_{mm} \vec{m}_1 \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{m}_1 \vec{l}_2 + a_{lm} \vec{l}_1 \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_1 \vec{l}_2 \approx a_{mm} \vec{m}_1 \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_1 \vec{l}_2,$$

де малість доданків $a_{mm} \vec{m}_1 \vec{m}_2$, $a_{ll} \vec{l}_1 \vec{l}_2$ відносно один одного можна розглядати у якості часткових випадків. Якщо ж не виконується подвійне співвідношення

$$|a_{ml}| \sim |a_{lm}| \sim |a_{ll}|$$

або

$$|a_{ll}| \gg \max \{|a_{ml}|, |a_{lm}|\},$$

то не можна знехтувати навіть зазначені доданки $a_{ml} \vec{m}_1 \vec{l}_2$, $a_{lm} \vec{l}_1 \vec{m}_2$.

Оскільки a_{mm} містить суму обмінних констант, а всі інші комбінації — по дві різниці, і з усіх обмінних констант в комбінації a_{mm} , a_{ml} , a_{lm} , a_{ll} тільки A_{11} входить з однаковим знаком «плюс», то для того, щоб виконувались наближення

$$a_{mm} \approx a_{ml} \approx a_{lm} \approx a_{ll},$$

має реалізуватись досить специфічна умова $A_{11} \gg \max \{A_{12}, A_{22}\}$. Тоді рівність (1.5) набуває вигляду

$$W_S = \int dV \delta(z) M_{01} M_{02} a_{ll} \vec{l}_1 \vec{l}_2. \quad (1.9)$$

Дане спрощення (1.9) виразу (1.6) є важливим тому, що як буде показано далі, рівняння Ландау–Ліфшиця в сігма моделі (див., наприклад, [18]) в загальному випадку є несумісним з граничними умовами, виведеними з наявністю усіх чотирьох доданків у підінтегральному виразі (1.6).

В другому випадку, якщо $a_{ll} = A_{11} - A_{12} - A_{21} + A_{22} = 0$ (а це може спостерігатися для інтерфейсу із симетричним виглядом енергії взаємодії чотирьох магнітних підґраток при $A_{11} = A_{12} = A_{21} = A_{22}$), то

$$W_S = \int dV \delta(z) M_{01} M_{02} \left(a_{ml} \vec{m}_1 \vec{l}_2 + a_{lm} \vec{l}_1 \vec{m}_2 \right), \quad (1.10)$$

оскільки $a_{ml} \vec{m}_1 \vec{l}_2 + a_{lm} \vec{l}_1 \vec{m}_2 \gg a_{mm} \vec{m}_1 \vec{m}_2$ і $a_{ll} \vec{l}_1 \vec{l}_2 = 0$.

Якщо лінійна комбінація a_{ll} є настільки малою, що доданок $a_{ll} \vec{l}_1 \vec{l}_2$ є набагато меншим за три інші, незважаючи на умови $|\vec{m}_i| \ll |\vec{l}_i|$, $i = 1, 2$, (так що $A_{11} + A_{22} \approx A_{12} + A_{21}$), то для типового випадку $a_{mm} \gg \max \{|a_{ml}|, |a_{lm}|\}$ доданки $a_{ml} \vec{m}_1 \vec{l}_2$, $a_{lm} \vec{l}_1 \vec{m}_2$ можуть виявитись того порядку, що й $a_{mm} \vec{m}_1 \vec{m}_2$, чи навіть набагато меншими. Відповідно, в загальному випадку, при обрахунку суми

$$a_{mm} \vec{m}_1 \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{m}_1 \vec{l}_2 + a_{lm} \vec{l}_1 \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_1 \vec{l}_2$$

потрібно враховувати усі три доданки, що залишились, або накласти специфічну умову — наприклад, якщо A_{22} , A_{12} є малими, порівняно

з A_{11} , A_{21} , то комбінація a_{lm} стає порядку a_{mm} , і, отже, доданком $a_{mm}\vec{m}_1\vec{m}_2$ можна знехтувати, тому що при $a_{lm} \sim a_{mm}$ виконується оцінка $a_{mm}\vec{m}_1\vec{m}_2 \ll a_{lm}\vec{l}_1\vec{m}_2$ в силу співвідношень $|\vec{m}_i| \ll |\vec{l}_i|$, $i = 1, 2$. Далі для виведення граничних умов в (1.6) для зручності будуть враховуватись усі чотири доданки в підінтегральному виразі і буде показано, що отримані граничні умови в сігма моделі у загальному випадку є несумісними з рівняннями Ландау–Ліфшиця в цій моделі. Тому як наслідок розрахунку граничних умов буде отримано різні граничні умови для першого і другого випадків, які є сумісними з рівняннями Ландау–Ліфшиця.

1.4 Система рівнянь Ландау–Ліфшиця для антиферромагнетиків в сігма-моделі з граничними умовами для вектора антиферромагнетизму

Система рівнянь Ландау–Ліфшиця для кожного з АФМ має наступний вигляд (див., наприклад, [18, с. 198] або [32, с. 284]):

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{M}^{(i)}}{\partial t} = -\gamma \left(\vec{M}^{(i)} \times \vec{H}_{mi}^{ef} + \vec{L}^{(i)} \times \vec{H}_{li}^{ef} \right), \\ \frac{\partial \vec{L}^{(i)}}{\partial t} = -\gamma \left(\vec{L}^{(i)} \times \vec{H}_{mi}^{ef} + \vec{M}^{(i)} \times \vec{H}_{li}^{ef} \right), \end{cases} \quad (1.11)$$

де $\vec{H}_{mi}^{ef} = -\frac{\delta w}{\delta \vec{M}^{(i)}}$ і $\vec{H}_{li}^{ef} = -\frac{\delta w}{\delta \vec{L}^{(i)}}$ позначають ефективні поля, w — повна густина магнітної енергії магнетонного кристалу ($w = w_1 + w_S + w_2$; w_i , w_S — густина енергії власне АФМ з номером $i \in \{1, 2\}$ та відповідно інтерфейсу), $\vec{L}^{(i)} = \left(\vec{M}_1^{(i)} - \vec{M}_2^{(i)} \right)$ — вектор антиферромагнетизму, $i = 1, 2$, варіаційна похідна $\delta \Phi / \delta \vec{M}$ функції $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ визначається рівністю (див., наприклад, [32], с. 283):

$$\frac{\delta \Phi}{\delta \vec{M}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{M}} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial (\partial \vec{M} / \partial x_j)} \right), \quad x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z.$$

Переходячи до безрозмірних $\vec{m}_i$, $\vec{l}_i$, перепишемо (1.11) з урахуванням (1.1) у вигляді

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial t} = \vec{m}_i \times \vec{H}_{mi}^{ef} + \vec{l}_i \times \vec{H}_{li}^{ef}, \\ \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} = \vec{l}_i \times \vec{H}_{mi}^{ef} + \vec{m}_i \times \vec{H}_{li}^{ef}, \end{cases} \quad (1.12)$$

причому ефективне поле

$$\vec{H}_{mi}^{ef} = -\frac{\delta w}{\delta \vec{M}^{(i)}} = -\frac{1}{2M_{0i}} \frac{\delta w}{\delta \vec{m}_i} = -\frac{1}{2M_{0i}} \left(\frac{\delta w_i}{\delta \vec{m}_i} + \frac{\delta w_S}{\delta \vec{m}_i} \right),$$

(де w_i , w_S — густина енергії власне АФМ з номером $i \in \{1, 2\}$ та відповідно інтерфейсу, повна густина магнітної енергії $w = w_1 + w_S + w_2$), і аналогічно

$$\vec{H}_{li}^{ef} = -\frac{1}{2M_{0i}} \left(\frac{\delta w_i}{\delta \vec{l}_i} + \frac{\delta w_S}{\delta \vec{l}_i} \right).$$

У виразі (1.12) для зручності запису обрано варіант введення гіромагнітного відношення, що враховує від'ємний знак заряду електрона: $\gamma \rightarrow -\gamma < 0$. Вводячи безрозмірне ефективне магнітне поле при $i \in \{1, 2\}$, як

$$\begin{aligned} \vec{h}_{mi}^{ef} &= \frac{2\vec{H}_{mi}^{ef}}{M_{0i}} = -\frac{1}{(M_{0i})^2} \left(\frac{\delta w_i}{\delta \vec{m}_i} + \frac{\delta w_S}{\delta \vec{m}_i} \right), \\ \vec{h}_{li}^{ef} &= \frac{2\vec{H}_{li}^{ef}}{M_{0i}} = -\frac{1}{(M_{0i})^2} \left(\frac{\delta w_i}{\delta \vec{l}_i} + \frac{\delta w_S}{\delta \vec{l}_i} \right), \end{aligned} \quad (1.13)$$

систему рівнянь (1.12) остаточно переписуємо у формі

$$\begin{cases} \frac{2}{\gamma M_{0i}} \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial t} = \vec{m}_i \times \vec{h}_{mi}^{ef} + \vec{l}_i \times \vec{h}_{li}^{ef}, \\ \frac{2}{\gamma M_{0i}} \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} = \vec{l}_i \times \vec{h}_{mi}^{ef} + \vec{m}_i \times \vec{h}_{li}^{ef}. \end{cases} \quad (1.14)$$

1.4.1 Обрахунок густин енергій та їх варіаційних похідних

Густини енергій w_i та w_S , що визначають ефективне магнітне поле изначаються рівностями (1.4) та (1.8). Знайдемо варіаційні похідні цих густин. Враховуючи рівності

$$\frac{\delta (m_{iz})^2}{\delta \vec{m}_i} = 2m_{iz} \vec{e}_z, \quad \frac{\delta}{\delta \vec{m}_i} \left(\vec{d}_i \left[\vec{m}_i \times \vec{l}_i \right] \right) = \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right],$$

одержуємо

$$\frac{\delta w_i}{\delta \vec{m}_i} = 4(M_{0i})^2 \left(\delta_i \vec{m}_i - \alpha'_i \Delta \vec{m}_i + \beta_{2i} \vec{e}_z m_{iz} + \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] - \vec{h}_i \right),$$

$$\frac{\delta w_i}{\delta \vec{l}_i} = 4(M_{0i})^2 \left(-\alpha_i \Delta \vec{l}_i + \beta_{1i} \vec{e}_z l_{iz} + \left[\vec{d}_i \times \vec{m}_i \right] \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta w_i}{\delta \vec{m}_i} &= 4 (M_{0i})^2 \frac{\delta}{\delta \vec{m}_i} \left(\frac{1}{2} (\delta_i (\vec{m}_i))^2 + \frac{\alpha_i}{2} (\vec{\nabla} \vec{l}_i)^2 + \frac{\alpha'_i}{2} (\vec{\nabla} \vec{m}_i)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \beta_{1i} (l_{iz})^2 + \frac{1}{2} \beta_{2i} (m_{iz})^2 + \vec{d}_i [\vec{m}_i \times \vec{l}_i] - \vec{m}_i \vec{h}_{0i} \right) = \\ &= 4 (M_{0i})^2 \left(\delta_i \vec{m}_i + \frac{1}{2} \alpha'_i \frac{\delta}{\delta \vec{m}_i} (\vec{\nabla} \vec{m}_i)^2 + \frac{1}{2} \beta_{2i} \frac{\delta (m_{iz})^2}{\delta \vec{m}_i} + \frac{\delta}{\delta \vec{m}_i} \vec{d}_i [\vec{m}_i \times \vec{l}_i] - \vec{h}_{0i} \right). \end{aligned}$$

Для перетворення $\frac{\delta}{\delta \vec{m}_i} (\vec{\nabla} \vec{m}_i)^2$ зауважимо, що вираз $\frac{1}{2} \alpha'_i (\vec{\nabla} \vec{m}_i)^2$ є елементом густини енергії (1.4), причому для інтегралу $\delta \left(\int (\vec{\nabla} \vec{m}_i)^2 dV \right) = \int \delta \left((\vec{\nabla} \vec{m}_i)^2 \right) dV$ виконується рівність

$$\begin{aligned} &\int \delta \left((\vec{\nabla} \vec{m}_i)^2 \right) dV = \\ &= 2 \int \left(\frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial x} + \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial y} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial y} + \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial z} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (1.15)$$

(відмітимо, крім того, що вираз $\frac{1}{2} \alpha'_i (\vec{\nabla} \vec{m}_i)^2$ є згорткою тензора, а не скалярним добутком $\vec{\nabla} \cdot \vec{m}_i = \text{div} (\vec{m}_i) = \frac{\partial m_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial m_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial m_{iz}}{\partial z}$. Справді, відповідний доданок у вихідному виразі для густини енергії $\frac{1}{2} \alpha_{jk} \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_j} \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_k}$, де α_{jk} — компоненти обмінного тензору $\hat{\alpha}$ (див. [23]), для досліджуваного випадку виродження тензору неоднорідного обміну

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

спроститься до виразу $\frac{1}{2} \alpha'_i \sum_j \left(\frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x_j} \right)^2$. Відповідно, у вираз (1.15) входить сума

$$\frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial x} + \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial y} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial y} + \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial z} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial z},$$

а не добуток

$$\left(\frac{\partial m_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial m_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial m_{iz}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \delta m_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \delta m_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \delta m_{iz}}{\partial z} \right) = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial (\delta m_{ik})}{\partial x_k},$$

де $m_{i1} := m_{ix}$, $m_{i2} := m_{iy}$, $m_{i3} := m_{iz}$, $i = 1, 2$.)

Для нескінченного антиферромагнетика можна записати

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial x} dx dy dz &= \int dy dz \left(\left(\delta \vec{m}_i \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x} \right) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \int \delta \vec{m}_i \frac{\partial^2 \vec{m}_i}{\partial x^2} dx \right) = \\ &= - \int \delta \vec{m}_i \frac{\partial^2 \vec{m}_i}{\partial x^2} dx dy dz, \end{aligned}$$

оскільки в силу умови відсутності збурень на нескінченності справедлива рівність $\left(\delta \vec{m}_i \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x} \right) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0$.

Застосовуючи аналогічні міркування до доданків $\frac{\partial \vec{m}_i}{\partial y} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial y}$ та $\frac{\partial \vec{m}_i}{\partial z} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial z}$, перепишемо

$$\begin{aligned} 2 \int \left(\frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial x} + \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial y} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial y} + \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial z} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial z} \right) dx dy dz &= \\ = -2 \int \left(\frac{\partial^2 \vec{m}_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{m}_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{m}_i}{\partial z^2} \right) \delta \vec{m}_i dx dy dz &= -2 \int \Delta \vec{m}_i \delta \vec{m}_i dV. \end{aligned}$$

Проте, для досліджуваних напівнескінчених антиферромагнетиків наведені вище міркування можна застосувати лише для доданків $\frac{\partial \vec{m}_i}{\partial y} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial y}$ та $\frac{\partial \vec{m}_i}{\partial z} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial z}$, а для доданку $\frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial x}$ мають місце перетворення відповідно для $i = 2$ та $i = 1$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \vec{m}_2}{\partial z} \frac{\partial (\delta \vec{m}_2)}{\partial z} dx dy dz &= \int dx dy \left(\left(\delta \vec{m}_2 \frac{\partial \vec{m}_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=0}^{z=+\infty} - \int \delta \vec{m}_2 \frac{\partial^2 \vec{m}_2}{\partial z^2} dz \right), \\ \int \frac{\partial \vec{m}_1}{\partial z} \frac{\partial (\delta \vec{m}_1)}{\partial z} dx dy dz &= \int dx dy \left(\left(\delta \vec{m}_1 \frac{\partial \vec{m}_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=-\infty}^{z=0} - \int \delta \vec{m}_1 \frac{\partial^2 \vec{m}_1}{\partial z^2} dz \right). \end{aligned}$$

Якщо, аналогічно до випадку нескінченного антиферромагнетика,

$$\delta \vec{m}_i \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x} \Big|_{z=\pm\infty} := \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \delta \vec{m}_i \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x} = 0,$$

то граничні значення $\delta \vec{m}_i \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x} \Big|_{z=0} := \lim_{z \rightarrow 0} \delta \vec{m}_i \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x}$ не є тотожно рівними нулеві у загальному випадку. Таким чином, для досліджуваного інтерфейсу між антиферромагнетиками справджується рівність

$$\begin{aligned} &= 2 \int \left(\frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial x} + \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial y} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial y} + \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial z} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ &= 2 \left(\delta \vec{m}_i \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x} \Big|_{z=0} - \int \Delta \vec{m}_i \delta \vec{m}_i dV \right). \end{aligned}$$

Дослідимо доданки $\delta \vec{m}_i \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x} \Big|_{z=0}$. Зауважимо, що у системі рівнянь (1.14) ефективні внутрішні поля (1.13) входять виключно у векторних добутках $\vec{m}_i \times \vec{h}_{mi}^{ef}$, $\vec{m}_i \times \vec{h}_{li}^{ef}$, $\vec{l}_i \times \vec{h}_{mi}^{ef}$, $\vec{l}_i \times \vec{h}_{li}^{ef}$, тому доданки $\delta \vec{m}_i \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x} \Big|_{z=0}$ утворюють лінійні комбінації відповідно елементів $(\vec{m}_i \times \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial z} \Big|_{z=0}) \delta \vec{m}_i$, $(\vec{l}_i \times \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial z} \Big|_{z=0}) \delta \vec{m}_i$. Зауваживши це, можливо проінтегрувати рівняння Ландау–Ліфшиця за товщиною інтерфейсу (у напрямку однієї з нормалей до його границь) і, таким чином, звести задачу до аналогічної задачі, що описує інтерфейс між двома феромагнетиками (див., наприклад, [23]). Повторивши наведені у [23] міркування для інтерфейсу між антиферомагнетиками, отримуємо аналогічні граничні умови, згідно яким, інтеграл за товщиною інтерфейсу від зазначених вище векторних добутків дорівнює нулю.

Таким чином, незважаючи на те, що питання про значення виразів $\delta \vec{m}_i \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x} \Big|_{z=0}$ залишається відкритим, ефективно можна покласти $\delta \vec{m}_i \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x} \Big|_{z=0} = 0$, зважаючи на вигляд лінійних комбінацій, в які ці вирази входять (і які дорівнюють нулю згідно зазначених вище граничних умов). Ці міркування дають можливість замінити

$$= 2 \int \left(\frac{\partial \vec{m}_i}{\partial x} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial x} + \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial y} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial y} + \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial z} \frac{\partial (\delta \vec{m}_i)}{\partial z} \right) dx dy dz \rightarrow$$

$$\rightarrow -2 \int \Delta \vec{m}_i \delta \vec{m}_i dV,$$

крім того, враховуючи додатково рівність (8а), можна замінити елемент густини енергії $\frac{1}{2} \alpha'_i \delta \left(\left(\vec{\nabla} \vec{m}_i \right) \right)^2 \rightarrow -\alpha'_i \Delta \vec{m}_i \delta \vec{m}_i$ і $\frac{1}{2} \alpha'_i \frac{\delta}{\delta \vec{m}_i} \left(\vec{\nabla} \vec{m}_i \right)^2 \rightarrow -\alpha'_i \Delta \vec{m}_i$, $i = 1, 2$.

Аналогічним чином запишемо

$$\frac{\delta w_i}{\delta \vec{l}_i} = 4 (M_{0i})^2 \frac{\delta}{\delta \vec{l}_i} \left(\frac{1}{2} (\delta (\vec{m}_i))^2 + \frac{1}{2} \alpha_i \left(\vec{\nabla} \vec{l}_i \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha'_i \left(\vec{\nabla} \vec{m}_i \right)^2 + \frac{1}{2} \beta_{1i} l_{iz}^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \beta_{2i} m_{iz}^2 + \vec{d}_i \left[\vec{m}_i \times \vec{l}_i \right] - \vec{m}_i \vec{h}_{0i} \right) =$$

$$= 4 (M_{0i})^2 \left(\alpha_i \vec{\nabla} \vec{l}_i \frac{\delta \vec{\nabla} \vec{l}_i}{\delta \vec{l}_i} + \frac{1}{2} \beta_{1i} \frac{\delta l_{iz}^2}{\delta \vec{l}_i} + \frac{\delta}{\delta \vec{l}_i} \vec{d}_i \left[\vec{m}_i \times \vec{l}_i \right] \right),$$

та зауважимо, що

$$\frac{\delta (l_{iz})^2}{\delta \vec{l}_i} = 2 l_{iz} \vec{e}_z, \quad \frac{\delta}{\delta \vec{l}_i} \left(\vec{d}_i \left[\vec{m}_i \times \vec{l}_i \right] \right) = \left[\vec{d}_i \times \vec{m}_i \right],$$

при цьому, аналогічно до перетворення $\frac{1}{2}\alpha'_i \frac{\delta}{\delta \vec{m}_i} \left(\vec{\nabla} \vec{m}_i \right)^2 \rightarrow -\alpha'_i \Delta \vec{m}_i$, маємо:
 $\frac{1}{2}\alpha_i \frac{\delta}{\delta \vec{l}_i} \left(\vec{\nabla} \vec{l}_i \right)^2 \rightarrow -\alpha_i \Delta \vec{l}_i$.

Варіаційні похідні від густини енергії w_S набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\delta w_S}{\delta \vec{m}_1} &= \delta(z) M_{01} M_{02} \frac{\delta}{\delta \vec{m}_1} \left(a_{mm} \vec{m}_1 \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{m}_1 \vec{l}_2 + a_{lm} \vec{l}_1 \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_1 \vec{l}_2 \right) = \\ &= \delta(z) M_{01} M_{02} \left(a_{mm} \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{l}_2 \right), \\ \frac{\delta w_S}{\delta \vec{m}_2} &= \delta(z) M_{01} M_{02} \frac{\delta}{\delta \vec{m}_2} \left(a_{mm} \vec{m}_1 \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{m}_1 \vec{l}_2 + a_{lm} \vec{l}_1 \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_1 \vec{l}_2 \right) = \\ &= \delta(z) M_{01} M_{02} \left(a_{mm} \vec{m}_1 + a_{lm} \vec{l}_1 \right), \\ \frac{\delta w_S}{\delta \vec{l}_1} &= \delta(z) M_{01} M_{02} \frac{\delta}{\delta \vec{l}_1} \left(a_{mm} \vec{m}_1 \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{m}_1 \vec{l}_2 + a_{lm} \vec{l}_1 \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_1 \vec{l}_2 \right) = \\ &= \delta(z) M_{01} M_{02} \left(a_{lm} \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_2 \right), \\ \frac{\delta w_S}{\delta \vec{l}_2} &= \delta(z) M_{01} M_{02} \frac{\delta}{\delta \vec{l}_2} \left(a_{mm} \vec{m}_1 \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{m}_1 \vec{l}_2 + a_{lm} \vec{l}_1 \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_1 \vec{l}_2 \right) = \\ &= \delta(z) M_{01} M_{02} \left(a_{ml} \vec{m}_1 + a_{ll} \vec{l}_1 \right). \end{aligned}$$

Таким чином, безрозмірне локальне поле (1.13) для кожного аниферо-магнетика запишеться, відповідно, у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{h}_{m1}^{ef} &= -\frac{1}{(M_{01})^2} \left(\frac{\delta w_1}{\delta \vec{m}_1} + \frac{\delta w_S}{\delta \vec{m}_1} \right) = \\ &= -\left(4 \left(\delta_1 \vec{m}_1 - \alpha'_1 \Delta \vec{m}_1 + \beta_{21} \vec{e}_z m_{1z} + \left[\vec{l}_1 \times \vec{d}_1 \right] - \vec{h}_{01} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{mm} \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{l}_2 \right) \right), \\ \vec{h}_{m2}^{ef} &= -\frac{1}{(M_{02})^2} \left(\frac{\delta w_2}{\delta \vec{m}_2} + \frac{\delta w_S}{\delta \vec{m}_2} \right) = \\ &= -\left(4 \left(\delta_2 \vec{m}_2 - \alpha'_2 \Delta \vec{m}_2 + \beta_{22} \vec{e}_z m_{2z} + \left[\vec{l}_2 \times \vec{d}_2 \right] - \vec{h}_{02} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{mm} \vec{m}_1 + a_{lm} \vec{l}_1 \right) \right), \\ \vec{h}_{l1}^{ef} &= -\frac{1}{(M_{01})^2} \left(\frac{\delta w_1}{\delta \vec{l}_1} + \frac{\delta w_S}{\delta \vec{l}_1} \right) = \end{aligned}$$

$$= - \left(4 \left(-\alpha_1 \Delta \vec{l}_1 + \beta_{11} \vec{e}_z l_{1z} + \left[\vec{d}_1 \times \vec{m}_1 \right] \right) + \right. \\ \left. + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{lm} \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_2 \right) \right),$$

$$\vec{h}_{l2}^{ef} = - \frac{1}{(M_{02})^2} \left(\frac{\delta w_1}{\delta \vec{l}_2} + \frac{\delta w_S}{\delta \vec{l}_2} \right) = \\ = - \left(4 \left(-\alpha_2 \Delta \vec{l}_2 + \beta_{12} \vec{e}_z l_{2z} + \left[\vec{d}_2 \times \vec{m}_2 \right] \right) + \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{ml} \vec{m}_1 + a_{ll} \vec{l}_1 \right) \right).$$

Підставляючи отримані вирази для ефективних полів у рівняння (систему рівнянь) Ландау–Ліфшиця (1.14), остаточно отримуємо (відповідно послідовно при $i = 1$ та $i = 2$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\gamma M_{01}} \frac{\partial \vec{m}_1}{\partial t} = \left[4 \left(\delta_1 \vec{m}_1 - \alpha'_1 \Delta \vec{m}_1 + \beta_{21} \vec{e}_z m_{1z} + \left[\vec{l}_1 \times \vec{d}_1 \right] - \vec{h}_{01} \right) + \right. \\ \left. + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{mm} \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{l}_2 \right) \right] \times \vec{m}_1 + \\ \left. + \left[\left(4 \left(-\alpha_1 \Delta \vec{l}_1 + \beta_{11} \vec{e}_z l_{1z} + \left[\vec{d}_1 \times \vec{m}_1 \right] \right) + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{lm} \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_2 \right) \right) \times \vec{l}_1 \right], \right. \\ \\ \frac{2}{\gamma M_{01}} \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial t} = \left[\left(4 \left(\delta_1 \vec{m}_1 - \alpha'_1 \Delta \vec{m}_1 + \beta_{21} \vec{e}_z m_{1z} + \left[\vec{l}_1 \times \vec{d}_1 \right] - \vec{h}_{01} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{mm} \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{l}_2 \right) \right) \times \vec{l}_1 \right] + \\ \left. + \left[\left(4 \left(-\alpha_1 \Delta \vec{l}_1 + \beta_{11} \vec{e}_z l_{1z} + \left[\vec{d}_1 \times \vec{m}_1 \right] \right) + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{lm} \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_2 \right) \right) \times \vec{m}_1 \right], \right. \\ \\ \frac{2}{\gamma M_{02}} \frac{\partial \vec{m}_2}{\partial t} = \left[\left(4 \left(\delta_2 \vec{m}_2 - \alpha'_2 \Delta \vec{m}_2 + \beta_{22} \vec{e}_z m_{2z} + \left[\vec{l}_2 \times \vec{d}_2 \right] - \vec{h}_{02} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{mm} \vec{m}_1 + a_{lm} \vec{l}_1 \right) \right) \times \vec{m}_2 + \right. \\ \left. + \left[\left(4 \left(-\alpha_2 \Delta \vec{l}_2 + \beta_{12} \vec{e}_z l_{2z} + \left[\vec{d}_2 \times \vec{m}_2 \right] \right) + \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{ml} \vec{m}_1 + a_{ll} \vec{l}_1 \right) \right) \times \vec{l}_2 \right], \right. \\ \\ \frac{2}{\gamma M_{02}} \frac{\partial \vec{l}_2}{\partial t} = \left[\left(4 \left(\delta_2 \vec{m}_2 - \alpha'_2 \Delta \vec{m}_2 + \beta_{22} \vec{e}_z m_{2z} + \left[\vec{l}_2 \times \vec{d}_2 \right] - \vec{h}_{02} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{mm} \vec{m}_1 + a_{lm} \vec{l}_1 \right) \right) \times \vec{l}_2 \right] + \\ \left. + \left[\left(4 \left(-\alpha_2 \Delta \vec{l}_2 + \beta_{12} \vec{e}_z l_{2z} + \left[\vec{d}_2 \times \vec{m}_2 \right] \right) + \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{ml} \vec{m}_1 + a_{ll} \vec{l}_1 \right) \right) \times \vec{m}_2 \right], \right. \end{array} \right.$$

далі, враховуючи співвідношення $[\vec{m}_i, \vec{m}_i] = 0$, $i = 1, 2$, переписуємо дані

системи у вигляді

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{\gamma M_{01}} \frac{\partial \vec{m}_1}{\partial t} &= \left[\left(4 \left(-\alpha'_1 \Delta \vec{m}_1 + \beta_{21} \vec{e}_z m_{1z} + [\vec{l}_1 \times \vec{d}_1] - \vec{h}_{01} \right) + \right. \right. \\ &+ \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{mm} \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{l}_2 \right) \Big) \times \vec{m}_1 \Big] + \\ &+ \left[\left(4 \left(-\alpha_1 \Delta \vec{l}_1 + \beta_{11} \vec{e}_z l_{1z} + [\vec{d}_1 \times \vec{m}_1] \right) + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{lm} \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_2 \right) \right) \times \vec{l}_1 \right], \\ \frac{2}{\gamma M_{01}} \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial t} &= \left[\left(4 \left(\delta_1 \vec{m}_1 - \alpha'_1 \Delta \vec{m}_1 + \beta_{21} \vec{e}_z m_{1z} + [\vec{l}_1 \times \vec{d}_1] - \vec{h}_{01} \right) + \right. \right. \\ &+ \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{mm} \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{l}_2 \right) \Big) \times \vec{l}_1 \Big] + \\ &+ \left[\left(4 \left(-\alpha_1 \Delta \vec{l}_1 + \beta_{11} \vec{e}_z l_{1z} + [\vec{d}_1 \times \vec{m}_1] \right) + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{lm} \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_2 \right) \right) \times \vec{m}_1 \right], \end{aligned} \right. \quad (1.16)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{\gamma M_{02}} \frac{\partial \vec{m}_2}{\partial t} &= \left[\left(4 \left(-\alpha'_2 \Delta \vec{m}_2 + \beta_{22} \vec{e}_z m_{2z} + [\vec{l}_2 \times \vec{d}_2] - \vec{h}_{02} \right) + \right. \right. \\ &+ \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{mm} \vec{m}_1 + a_{lm} \vec{l}_1 \right) \Big) \times \vec{m}_2 \Big] + \\ &+ \left[\left(4 \left(-\alpha_2 \Delta \vec{l}_2 + \beta_{12} \vec{e}_z l_{2z} + [\vec{d}_2 \times \vec{m}_2] \right) + \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{ml} \vec{m}_1 + a_{ll} \vec{l}_1 \right) \right) \times \vec{l}_2 \right], \\ \frac{2}{\gamma M_{02}} \frac{\partial \vec{l}_2}{\partial t} &= \left[\left(4 \left(\delta_2 \vec{m}_2 - \alpha'_2 \Delta \vec{m}_2 + \beta_{22} \vec{e}_z m_{2z} + [\vec{l}_2 \times \vec{d}_2] - \vec{h}_{02} \right) + \right. \right. \\ &+ \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{mm} \vec{m}_1 + a_{lm} \vec{l}_1 \right) \Big) \times \vec{l}_2 \Big] + \\ &+ \left[\left(4 \left(-\alpha_2 \Delta \vec{l}_2 + \beta_{12} \vec{e}_z l_{2z} + [\vec{d}_2 \times \vec{m}_2] \right) + \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{ml} \vec{m}_1 + a_{ll} \vec{l}_1 \right) \right) \times \vec{m}_2 \right], \end{aligned} \right. \quad (1.17)$$

1.4.2 Система рівнянь Ландау–Ліфшиця для антиферромагнетиків за умови довгохвильового наближення

Застосуємо довгохвильове наближення, вважаючи, що характерний лінійний розмір неоднорідності поля намагніченості набагато більший за між-атомну відстань. Тоді у системах рівнянь Ландау–Ліфшиця (1.16), (1.17) можна знехтувати доданки, що містять просторові похідні намагніченості та вектору антиферромагнетизму (у першому рівнянні — тільки просторові похідні намагніченості, оскільки у використаній моделі $|M^{(i)}| \ll |L^{(i)}|$ і, отже, $|\vec{m}_i| \ll |\vec{l}_i|$, $i = 1, 2$) а також можна знехтувати доданки, що враховують

магнітну анізотропію, порівняно з відповідними доданками, що враховують однорідні обмінні ефекти (оскільки для типових АФМ мають місце оцінки: $\beta_{2i} \ll \delta_i$, $\beta_{1i} \ll \delta_i$, $i = 1, 2$). За такого наближення одержані вище системи рівнянь Ландау–Ліфшиця спростяться, зокрема, система (1.16) набуде вигляду:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{\gamma M_{01}} \frac{\partial \vec{m}_1}{\partial t} &= \left[\left(4 \left(\beta_{21} \vec{e}_z m_{1z} + [\vec{l}_1 \times \vec{d}_1] - \vec{h}_{01} \right) + \right. \right. \\ &+ \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{mm} \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{l}_2 \right) \Big) \times \vec{m}_1 \Big] + \\ &+ \left[\left(4 \left(-\alpha_1 \Delta \vec{l}_1 + \beta_{11} \vec{e}_z l_{1z} + [\vec{d}_1 \times \vec{m}_1] \right) + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{lm} \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_2 \right) \right) \times \vec{l}_1 \right], \\ \frac{2}{\gamma M_{01}} \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial t} &= \left[\left(4 \left(\delta_1 \vec{m}_1 + [\vec{l}_1 \times \vec{d}_1] - \vec{h}_{01} \right) + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{mm} \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{l}_2 \right) \right) \times \vec{l}_1 \right] + \\ &+ \left[\left(4 [\vec{d}_1 \times \vec{m}_1] + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{lm} \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_2 \right) \right) \times \vec{m}_1 \right]; \end{aligned} \right. \quad (1.18)$$

а система (1.17) перетвориться на

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{\gamma M_{02}} \frac{\partial \vec{m}_2}{\partial t} &= \left[\left(4 \left(\beta_{22} \vec{e}_z m_{2z} + [\vec{l}_2 \times \vec{d}_2] - \vec{h}_{02} \right) + \right. \right. \\ &+ \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{mm} \vec{m}_1 + a_{lm} \vec{l}_1 \right) \Big) \times \vec{m}_2 \Big] + \\ &+ \left[\left(4 \left(-\alpha_2 \Delta \vec{l}_2 + \beta_{12} \vec{e}_z l_{2z} + [\vec{d}_2 \times \vec{m}_2] \right) + \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{ml} \vec{m}_1 + a_{ll} \vec{l}_1 \right) \right) \times \vec{l}_2 \right], \\ \frac{2}{\gamma M_{02}} \frac{\partial \vec{l}_2}{\partial t} &= \left[\left(4 \left(\delta_2 \vec{m}_2 + [\vec{l}_2 \times \vec{d}_2] - \vec{h}_{02} \right) + \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{mm} \vec{m}_1 + a_{lm} \vec{l}_1 \right) \right) \times \vec{l}_2 \right] + \\ &+ \left[\left(4 [\vec{d}_2 \times \vec{m}_2] + \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{ml} \vec{m}_1 + a_{ll} \vec{l}_1 \right) \right) \times \vec{m}_2 \right]. \end{aligned} \right. \quad (1.19)$$

1.4.3 Граничні умови для вектору антиферромагнетизму

Інтегруємо перше рівняння системи (1.18) уздовж тонкого шару навколо інтерфейсу, далі, спрямовуючи товщину інтерфейсу до нуля, одержуємо

рівність:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{mm} \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{l}_2 \right) \times \vec{m}_1 \right] + \\ & + \left[\left(4\alpha_1 \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} + \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{lm} \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_2 \right) \right) \times \vec{l}_1 \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Зауважимо, що з цього рівняння (1.20) надалі будемо отримувати граничні умови для вектора антиферромагнетизму. З метою знаходження виразу для намагніченості, множимо друге рівняння системи рівнянь (1.18) ліворуч векторно на $\vec{l}_1$, одержуємо :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\gamma M_{01}} \left[\vec{l}_1 \times \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial t} \right] = 4\delta_1 \left[\vec{l}_1 \times \left[\vec{m}_1 \times \vec{l}_1 \right] \right] + \\ & + 4 \left[\vec{l}_1 \times \left[\left[\vec{l}_1 \times \vec{d}_1 \right] \times \vec{l}_1 \right] \right] - 4 \left[\vec{l}_1 \times \left[h_{01} \times \vec{l}_1 \right] \right] + \\ & + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{mm} \left[\vec{l}_1 \times \left[\vec{m}_2 \times \vec{l}_1 \right] \right] + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ml} \left[\vec{l}_1 \times \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] \right] + \\ & + 4 \left[\vec{l}_1 \times \left[\left[\vec{d}_1 \times \vec{m}_1 \right] \times \vec{m}_1 \right] \right] + \\ & + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{lm} \left[\vec{l}_1 \times \left[\vec{m}_2 \times \vec{m}_1 \right] \right] + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ll} \left[\vec{l}_1 \times \left[\vec{l}_2 \times \vec{m}_1 \right] \right]. \end{aligned}$$

Звідси послідовно одержуємо рівності

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\gamma M_{01}} \left[\vec{l}_1 \times \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial t} \right] = 4\delta_1 \vec{m}_1 + 4 \left[\vec{l}_1 \times \vec{d}_1 \right] - 4\vec{h}_{01} + \\ & + 4\vec{l}_1 \left(\vec{l}_1 \vec{h}_{01} \right) + 4 \left[\left[\vec{d}_1 \times \vec{m}_1 \right] \times \vec{m}_1 \right] + \\ & + \delta(z) \left(\left[\vec{l}_1 \times \left(\frac{M_{02}}{M_{01}} a_{mm} \left[\vec{m}_2 \times \vec{l}_1 \right] \right) \right] + \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ml} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{lm} \left[\vec{m}_2 \times \vec{m}_1 \right] + \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ll} \left[\vec{l}_2 \times \vec{m}_1 \right] \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{m}_1 = & \frac{1}{2\gamma M_{01}\delta_1} \left[\vec{l}_1 \times \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial t} \right] + \frac{1}{\delta_1} \left[\vec{d}_1 \times \vec{l}_1 \right] + \frac{\vec{h}_{01}}{\delta_1} - \frac{\vec{l}_1 \left(\vec{l}_1 \vec{h}_{01} \right)}{\delta_1} - \\
& -\delta(z) \left(\left[\vec{l}_1 \times \left(\frac{1}{4\delta_1} \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{mm} \left[\vec{m}_2 \times \vec{l}_1 \right] \right) \right] + \frac{1}{4\delta_1} \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ml} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{4\delta_1} \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{lm} \left[\vec{m}_2 \times \vec{m}_1 \right] + \frac{1}{4\delta_1} \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ll} \left[\vec{l}_2 \times \vec{m}_1 \right] \right) \right). \quad (1.21)
\end{aligned}$$

Згідно методології виведення граничних умов [23] для рівняння Ландау–Ліфшиця зазначимо, що поблизу інтерфейсу повинен утворюватися пограничний шар, в якому не можна нехтувати дисипативними процесами, які порушують закон збереження квадрата вектора параметру порядку. Товщина цього пограничного шару $\delta \approx \sqrt{\omega}$, де ω — частота зміни магнітного параметру порядку. В пограничному шарі відбувається стрімка зміна проекції ефективного поля на напрямок нормалі до інтерфейсу, так, що поблизу поверхні, але поза межами пограничного шару, граничні умови вже не виконуються. Тому намагніченість в суцільному матеріалі поза межами пограничного шару визначається попереднім виразом з доданками, які не містять дельта-функцію. Іншими словами, перша частина попереднього виразу без дельта функції — це вираз для намагніченості в сігма моделі поза межами інтерфейсу.

Тому, за умови довгохвильового наближення і сігма-моделі, одержуємо вираз для вектору намагніченості для першого антиферромагнетика поза межами інтерфейсу

$$\vec{m}_1 = \frac{1}{2\gamma M_{01}\delta_1} \left[\vec{l}_1 \times \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial t} \right] + \frac{1}{\delta_1} \left[\vec{d}_1 \times \vec{l}_1 \right] + \frac{\vec{h}_{01}}{\delta_1} - \frac{\vec{l}_1 \left(\vec{l}_1 \vec{h}_{01} \right)}{\delta_1}.$$

Замінюючи індекси 1 на 2 і 2 на 1, отримуємо аналогічний вираз для намагніченості другого АФМ у суцільному АФМ поза межами інтерфейсу, а саме:

$$\vec{m}_2 = \frac{1}{2\gamma M_{02}\delta_2} \left[\vec{l}_2 \times \frac{\partial \vec{l}_2}{\partial t} \right] + \frac{1}{\delta_2} \left[\vec{d}_2 \times \vec{l}_2 \right] + \frac{\vec{h}_{02}}{\delta_2} - \frac{\vec{l}_2 \left(\vec{l}_2 \vec{h}_{02} \right)}{\delta_2}.$$

Отримати намагніченість в сігма моделі всередині пограничного шару можна, проінтегрувавши рівність (1.21) для намагніченості за товщиною інтерфейсу і спрямувавши товщину інтерфейсу до нуля. Проте, так як вихідне

друге рівняння системи ми множимо векторно на $\vec{l}_1$, то вираз для намагніченості міститиме будь-який вектор, паралельний $\vec{l}_1$. Тому, щоб отримати намагніченість в сігма моделі всередині пограничного шару, проінтегруємо безпосередньо друге рівняння системи за товщиною інтерфейсу і спрямуємо товщину інтерфейсу до нуля. Одержуємо рівність

$$a_{mm} [\vec{m}_2 \times \vec{l}_1] + a_{ml} [\vec{l}_2 \times \vec{l}_1] + a_{ll} [\vec{l}_2 \times \vec{m}_1] = 0.$$

Заміняючи індекси 1 на 2 і 2 на 1, а також a_{lm} на a_{ml} , отримуємо аналогічне рівняння для намагніченості другого АФМ у прошарку інтерфейсу:

$$a_{mm} [\vec{m}_1 \times \vec{l}_2] + a_{lm} [\vec{l}_1 \times \vec{l}_2] + a_{ll} [\vec{l}_1 \times \vec{m}_2] = 0.$$

Два останніх рівняння

$$\begin{cases} a_{mm} [\vec{m}_2 \times \vec{l}_1] + a_{ml} [\vec{l}_2 \times \vec{l}_1] + a_{ll} [\vec{l}_2 \times \vec{m}_1] = 0, \\ a_{mm} [\vec{m}_1 \times \vec{l}_2] + a_{lm} [\vec{l}_1 \times \vec{l}_2] + a_{ll} [\vec{l}_1 \times \vec{m}_2] = 0 \end{cases}$$

не дають змогу визначити граничні умови для вектора антиферомагнетизму, проте, визначають систему рівнянь для вектора намагніченості всередині інтерфейсу через вектор антиферомагнетизму в пограничному шарі всередині інтерфейсу. Розв'яжемо цю систему рівнянь. Для зручності позначимо

$$\begin{cases} \vec{a} = [\vec{m}_2 \times \vec{l}_1], \\ \vec{b} = [\vec{m}_1 \times \vec{l}_2], \end{cases}$$

після чого, попередня система набуває вигляду

$$\begin{cases} a_{mm} \vec{a} + a_{ml} [\vec{l}_2 \times \vec{l}_1] + a_{ll} \vec{b} = 0, \\ a_{mm} \vec{b} + a_{lm} [\vec{l}_1 \times \vec{l}_2] + a_{ll} \vec{a} = 0, \end{cases}$$

далі, одержуємо з неї вирази для $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\begin{aligned} \vec{a} = [\vec{m}_2 \times \vec{l}_1] &= \frac{(a_{lm} a_{ll} - a_{ml} a_{mm})}{a_{mm}^2 - a_{ll}^2} [\vec{l}_2 \times \vec{l}_1], \\ \vec{b} = [\vec{m}_1 \times \vec{l}_2] &= \frac{(a_{lm} a_{mm} - a_{ml} a_{ll})}{a_{mm}^2 - a_{ll}^2} [\vec{l}_2 \times \vec{l}_1]. \end{aligned}$$

Здійснимо перетворення першого з рівнянь попередньої системи, після попереднього його інтегрування по тонкому шару в околі інтерфейсу (1.20), послідовно одержуємо

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{mm} \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{l}_2 \right) \right) \times \vec{m}_1 \right] + \\ & + \left[\left(4\alpha_1 \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} + \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{lm} \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_1 \right) \right) \times \vec{l}_1 \right] = 0, \\ & \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{mm} [\vec{m}_2 \times \vec{m}_1] + \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ml} [\vec{l}_2 \times \vec{m}_1] + 4\alpha_1 \left[\frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \times \vec{l}_1 \right] + \\ & + \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{lm} [\vec{m}_2 \times \vec{l}_1] + \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ll} [\vec{l}_2 \times \vec{l}_1] = 0, \end{aligned}$$

далі, враховуючи малість намагніченості, відкидаємо перший доданок, маємо

$$\frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ml} [\vec{l}_2 \times \vec{m}_1] + 4\alpha_1 \left[\frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \times \vec{l}_1 \right] + \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{lm} [\vec{m}_2 \times \vec{l}_1] + \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ll} [\vec{l}_2 \times \vec{l}_1] = 0,$$

після цього, враховуючи вирази для $\vec{a} = [\vec{m}_2 \times \vec{l}_1]$, $\vec{b} = [\vec{m}_1 \times \vec{l}_2]$ в лінійних відносно намагніченості доданках, отримуємо остаточні граничні умови:

$$\begin{aligned} & 4\alpha_1 \left[\frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \times \vec{l}_1 \right] + \\ & + \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{ll} + a_{lm} \frac{(a_{lm} a_{ll} - a_{ml} a_{mm})}{a_{mm}^2 - a_{ll}^2} - a_{ml} \frac{(a_{lm} a_{mm} - a_{ml} a_{ll})}{a_{mm}^2 - a_{ll}^2} \right) [\vec{l}_2 \times \vec{l}_1] = 0. \end{aligned}$$

Позначимо

$$a_{12} = a_{ll} + a_{lm} \frac{(a_{lm} a_{ll} - a_{ml} a_{mm})}{a_{mm}^2 - a_{ll}^2} - a_{ml} \frac{(a_{lm} a_{mm} - a_{ml} a_{ll})}{a_{mm}^2 - a_{ll}^2}.$$

Тоді попередня гранична умова набуває вигляду:

$$4\alpha_1 \left[\frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \times \vec{l}_1 \right] + \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{12} [\vec{l}_2 \times \vec{l}_1] = 0.$$

Замінюючи індекси 1 на 2 і 2 на 1, а також a_{lm} на a_{ml} , змінюючи напрямки диференціювання ($\partial \vec{l}_1 / \partial z \rightarrow -\partial \vec{l}_1 / \partial z$), отримуємо аналогічну граничну умову:

$$4\alpha_2 \left[\frac{\partial \vec{l}_2}{\partial z} \times \vec{l}_1 \right] + \frac{M_{01}}{M_{02}} a_{21} [\vec{l}_2 \times \vec{l}_1] = 0,$$

де

$$a_{21} = a_{ll} + a_{ml} \frac{(a_{ml} a_{ll} - a_{lm} a_{mm})}{a_{mm}^2 - a_{ll}^2} - a_{lm} \frac{(a_{ml} a_{mm} - a_{lm} a_{ll})}{a_{mm}^2 - a_{ll}^2}.$$

Система граничних умов

$$\begin{cases} 4\alpha_1 \left[\frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \times \vec{l}_1 \right] + \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{12} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] = 0, \\ 4\alpha_2 \left[\frac{\partial \vec{l}_2}{\partial z} \times \vec{l}_1 \right] + \frac{M_{01}}{M_{02}} a_{21} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] = 0, \end{cases}$$

не містить надлишкових рівнянь і є сумісною з рівняннями для вектору ан-тиферомагнетизму в сігма моделі.

Зауважимо, що дані граничні умови справедливі, якщо намагніченість є малою. Вимога малості намагніченості накладає обмеження на коефіцієнти, а саме:

$$\begin{cases} \left| \frac{a_{lm} a_{ll} - a_{ml} a_{mm}}{a_{mm}^2 - a_{ll}^2} \right| \ll 1, \\ \left| \frac{a_{lm} a_{mm} - a_{ml} a_{ll}}{a_{mm}^2 - a_{ll}^2} \right| \ll 1, \end{cases}$$

при виконанні яких, граничні умови є застосовними.

Зауважуючи, що в других рівняннях систем (1.18) та (1.19) можна знехтувати доданками $\left[\left[\vec{d}_i \times \vec{m}_i \right] \times \vec{m}_i \right]$ порівняно з $\left[\left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] \times \vec{l}_i \right]$, $i = 1, 2$, (ця можливість випливає з умов $|\vec{m}_i| \ll |\vec{l}_i|$, $i = 1, 2$), аналогічно у перших — $\left[4\beta_{2i} \vec{e}_z m_{iz} \times \vec{m}_i \right]$ порівняно з $\left[4\beta_{1i} \vec{e}_z l_{iz} \times \vec{l}_i \right]$, $i = 1, 2$, (вважаючи, що константи β_{2i} та β_{1i} є одного порядку малості при $i = 1, 2$).

Отже, системи рівнянь Ландау–Ліфшиця в рамках використаної моделі остаточно спрощуються до наступного вигляду:

$$\begin{cases} \frac{2}{\gamma M_{01}} \frac{\partial \vec{m}_1}{\partial t} = \left[\left(4 \left(\left[\vec{l}_1 \times \vec{d}_1 \right] - \vec{h}_{01} \right) + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{mm} \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{l}_2 \right) \right) \times \vec{m}_1 \right] + \\ + \left[\left(4 \left(-\alpha_1 \Delta \vec{l}_1 + \beta_{11} \vec{e}_z l_{1z} + \left[\vec{d}_1 \times \vec{m}_1 \right] \right) + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{lm} \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_2 \right) \right) \times \vec{l}_1 \right], \\ \frac{2}{\gamma M_{01}} \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial t} = \left[\left(4 \left(\delta_1 \vec{m}_1 + \left[\vec{l}_1 \times \vec{d}_1 \right] - \vec{h}_{01} \right) + \right. \right. \\ + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{mm} \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{l}_2 \right) \left. \right) \times \vec{l}_1 \right] + \\ + \left[\left(4 \left[\vec{d}_1 \times \vec{m}_1 \right] + \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{lm} \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_2 \right) \right) \times \vec{m}_1 \right]; \end{cases} \quad (1.22)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{\gamma M_{02}} \frac{\partial \vec{m}_2}{\partial t} = \left[\left(4 \left([\vec{l}_2 \times \vec{d}_2] - \vec{h}_{02} \right) + \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{mm} \vec{m}_1 + a_{lm} \vec{l}_1 \right) \right) \times \vec{m}_2 \right] + \\ & + \left[\left(4 \left(-\alpha_2 \Delta \vec{l}_2 + \beta_{12} \vec{e}_z l_{2z} + [\vec{d}_2 \times \vec{m}_2] \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{ml} \vec{m}_1 + a_{ll} \vec{l}_1 \right) \right) \times \vec{l}_2 \right], \\ & \frac{2}{\gamma M_{02}} \frac{\partial \vec{l}_2}{\partial t} = \left[\left(4 \left(\delta_2 \vec{m}_2 + [\vec{l}_2 \times \vec{d}_2] - \vec{h}_{02} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{mm} \vec{m}_1 + a_{lm} \vec{l}_1 \right) \right) \times \vec{l}_2 \right] + \\ & + \left[\left(4 [\vec{d}_2 \times \vec{m}_2] + \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{ml} \vec{m}_1 + a_{ll} \vec{l}_1 \right) \right) \times \vec{m}_2 \right]. \end{aligned} \right. \quad (1.23)$$

Для отримання граничних умов для векторів $\vec{m}_i$, $\vec{l}_i$, $i = 1, 2$, проінтегруємо отримані системи рівнянь (1.22), (1.23) уздовж області інтерфейсу $z \in [-\delta_0/2, \delta_0/2]$, спрямовуючи товщину δ_0 останнього до нуля: $\delta_0 \rightarrow 0$. Зауважимо, що при такому граничному переході інтеграл від всіх доданків, що мають обмежені значення (не містять дельта-функцію) прямуватиме до нуля. Таким чином, при інтегруванні достатньо лишити доданки, що містять дельта-функцію $\delta(z)$, безпосередньо, або відповідну похідну за змінною z від $\vec{m}_i$, $\vec{l}_i$, $i = 1, 2$ (у таких доданках дельта-функція $\delta(z)$ з'являється через наявність різкої зміни, на товщині інтерфейсу, яка переходить у стрибок при $\delta_0 \rightarrow 0$).

Таким чином, при інтегруванні другого рівняння системи (1.22), отримуємо

$$\begin{aligned} 0 = \frac{M_{02}}{M_{01}} \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} & \left(\left[\delta(z) \left(a_{mm} \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{l}_2 \right) \times \vec{l}_1 \right] + \right. \\ & \left. + \left[\delta(z) \left(a_{lm} \vec{m}_2 + a_{ll} \vec{l}_2 \right) \times \vec{m}_1 \right] \right) dz. \end{aligned}$$

Зауважимо, що всі множники у доданках, що містять дельта-функцію $\delta(z)$, крім власне дельта-функції, під час проведення граничного переходу $\delta_0 \rightarrow 0$, можуть вважатись сталими. Таким чином, після використання тотожності

$$\int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \delta(z) dz = 1,$$

остання рівність набуде вигляду

$$\left(a_{mm} [\vec{m}_2 \times \vec{l}_1] + a_{ml} [\vec{l}_2 \times \vec{l}_1] + a_{lm} [\vec{m}_2 \times \vec{m}_1] + a_{ll} [\vec{l}_2 \times \vec{m}_1] \right) \Big|_{z=0} = 0. \quad (1.24)$$

При інтегруванні першого рівняння системи (1.22) крім доданків, що містять $\delta(z)$ безпосередньо, згідно наведеним вище міркуванням, потрібно залишити також доданок $\left(-4\alpha_1 [\Delta \vec{l}_1 \times \vec{l}_1] \right)$. Зауваживши, що

$$\lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \int_0^{\delta_0} [\Delta \vec{l}_1 \times \vec{l}_1] dz = \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \int_0^{\delta_0} \left[\frac{\partial^2 \vec{l}_1}{\partial z^2} \times \vec{l}_1 \right] dz = \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \int_0^{\delta_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \times \vec{l}_1 \right] dz$$

(враховано при цьому, що доданки $\left[\frac{\partial \vec{l}_1}{\partial x^2} \times \vec{l}_1 \right]$ та $\left[\frac{\partial \vec{l}_1}{\partial y^2} \times \vec{l}_1 \right]$ не містять дельта-функцію $\delta(z)$ та, відповідно, можуть бути знехтувані при зазначеному граничному переході), далі, інтегруючи частинами (тобто, здійснюючи модифікацію інтегрування частинами для векторного добутку, що спирається на співвідношення $\mathbf{d} [\vec{a} \times \vec{b}] = [\mathbf{d}\vec{a} \times \vec{b}] + [\vec{a} \times \mathbf{d}\vec{b}]$, де $\mathbf{d} \equiv \partial/\partial z$), отримуємо

$$\begin{aligned} \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \int_0^{\delta_0} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \right) \times \vec{l}_1 \right] dz &= \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \left(\left[\frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \times \vec{l}_1 \right] \Big|_0^{\delta_0} - \int_0^{\delta_0} \left[\frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \times \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \right] dz \right) = \\ &= \left[\frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \times \vec{l}_1 \right] \Big|_{z=0} = - \left[\vec{l}_1 \times \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \right] \Big|_{z=0}, \end{aligned}$$

оскільки $\left[\frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \times \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \right] = 0$. Таким чином, інтегруючи перше рівняння системи (1.22) та переходячи до границі $\delta_0 \rightarrow 0$, отримуємо

$$\begin{aligned} &\left(\frac{M_{02}}{M_{01}} a_{mm} [\vec{m}_2 \times \vec{m}_1] + \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ml} [\vec{l}_2 \times \vec{m}_1] + \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{lm} [\vec{m}_2 \times \vec{l}_1] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ll} [\vec{l}_2 \times \vec{l}_1] + 4\alpha_1 \left[\vec{l}_1 \times \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \right] \right) \Big|_{z=0} = 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Вважаючи, що константи a_{mm} , a_{ml} , a_{lm} та a_{ll} є одного порядку малості, згідно модельному припущенню у рівнянні (1.24) достатньо залишити доданок $a_{ml} [\vec{l}_2 \times \vec{l}_1]$, оскільки всі інші доданки є вищих порядків малості. Аналогічні міркування можна застосувати до рівняння (1.25) — з тим зауваженням, що доданками $\frac{M_{02}}{M_{01}} a_{mm} [\vec{m}_2 \times \vec{m}_1]$, $\frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ml} [\vec{l}_2 \times \vec{m}_1]$ та $\frac{M_{02}}{M_{01}} a_{lm} [\vec{m}_2 \times \vec{l}_1]$ можна знехтувати порівняно з доданком $\frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ll} [\vec{l}_2 \times \vec{l}_1]$, проте, з модельного

припущення не впливає, у загальному випадку, порядок малості доданку $4\alpha_1 \left[\vec{l}_1 \times \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \right]$, тому ним знехтувати, взагалі кажучи, не можна.

Таким чином, систему граничних умов (1.24), (1.25) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} a_{ml} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] \Big|_{z=0} = 0, \\ \left(\frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ll} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] + 4\alpha_1 \left[\vec{l}_1 \times \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \right] \right) \Big|_{z=0} = 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Аналогічним чином, переходимо від антиферомагнетику 1 до антиферомагнетику 2 — проінтегруємо систему рівнянь (1.23) та перейдемо до границі $\delta_0 \rightarrow 0$. При інтегруванні другого рівняння системи (1.23) множник найменшого порядку малості має вигляд $a_{lm} \left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \right]$, що ефективно відповідає заміні $a_{ml} \rightarrow (-a_{lm})$ у першому рівнянні результуючої системи (1.26). Зауважимо, що при інтегруванні другого рівняння системи (1.23) відбувається ефективна зміна знаку $z \rightarrow (-z)$ при взятті похідної (оскільки похідна береться за напрямком зовнішньої нормалі до поверхні інтерфейсу, яка для одного з антиферомагнетиків спрямована в напрямку осі Oz , для іншого — в протилежному напрямку). Відповідно, замість рівнянь (1.24), (1.25) для антиферомагнетику 2, отримуємо

$$\begin{cases} \left(a_{mm} \left[\vec{m}_1 \times \vec{l}_2 \right] + a_{lm} \left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \right] + a_{ml} \left[\vec{m}_1 \times \vec{m}_2 \right] + a_{ll} \left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \right] \right) \Big|_{z=0} = 0, \\ \left(\frac{M_{01}}{M_{02}} a_{mm} \left[\vec{m}_1 \times \vec{m}_2 \right] + \frac{M_{01}}{M_{02}} a_{ml} \left[\vec{m}_1 \times \vec{l}_2 \right] + \frac{M_{01}}{M_{02}} a_{lm} \left[\vec{l}_1 \times \vec{m}_2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{M_{01}}{M_{02}} a_{ll} \left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \right] - 4\alpha_2 \left[\vec{l}_2 \times \frac{\partial \vec{l}_2}{\partial z} \right] \right) \Big|_{z=0} = 0. \end{cases}$$

або після врахування $|\vec{m}_i| \ll |\vec{l}_i|$, $i = 1, 2$, попередня гранична система набуває вигляду

$$\begin{cases} \left(a_{ll} \left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \right] \right) \Big|_{z=0} = 0, \\ \left(\frac{M_{01}}{M_{02}} a_{ll} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] + 4\alpha_2 \left[\vec{l}_2 \times \frac{\partial \vec{l}_2}{\partial z} \right] \right) \Big|_{z=0} = 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Проаналізуємо граничні умови (1.26), (1.27):

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ml} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] \Big|_{z=0} = 0, \\ \left(\frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ll} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] + 4\alpha_1 \left[\vec{l}_1 \times \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \right] \right) \Big|_{z=0} = 0, \\ \left(a_{ll} \left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \right] \right) \Big|_{z=0} = 0, \\ \left(\frac{M_{01}}{M_{02}} a_{ll} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] + 4\alpha_2 \left[\vec{l}_2 \times \frac{\partial \vec{l}_2}{\partial z} \right] \right) \Big|_{z=0} = 0. \end{array} \right. \quad (1.28)$$

Система граничних умов (1.28) є загалом сумісною з системою рівнянь Ландау–Ліфшиця в першому та другому антиферомагнетиках, але ця система граничних умов (1.28) є несумісною з рівняннями Ландау–Ліфшиця в сігма моделі:

$$\begin{aligned} & \left[\vec{l}_i \times \left(\alpha_i \Delta \vec{l}_i - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right) \right] + \frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} - \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} - \\ & - \beta_{ii} l_{iz} \left[\vec{l}_i \times \vec{e}_z \right] + \frac{1}{\delta_i} \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) \left[\vec{d}_i \times \vec{l}_i \right] + \frac{1}{\delta_i} \left[\vec{l}_i \times \left[\vec{h}_{0i} \times \vec{d}_i \right] \right] - \\ & - \frac{1}{\delta_i} \left[\vec{l}_i \times \vec{h}_{0i} \right] \left(\vec{l}_i \vec{h}_{0i} \right) = - \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i, \quad i \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

В одержаних рівняннях застосовна заміна $\gamma M_{0i} \rightarrow 4\gamma M_{0i}$, тоді, маємо

$$\begin{aligned} & \left[\vec{l}_i \times \left(4\alpha_i \Delta \vec{l}_i - \frac{1}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right) \right] + \frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} - \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} - \\ & - 4\beta_{ii} l_{iz} \left[\vec{l}_i \times \vec{e}_z \right] + \frac{4}{\delta_i} \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) \left[\vec{d}_i \times \vec{l}_i \right] + \frac{4}{\delta_i} \left[\vec{l}_i \times \left[\vec{h}_{0i} \times \vec{d}_i \right] \right] - \\ & - \frac{4}{\delta_i} \left[\vec{l}_i \times \vec{h}_{0i} \right] \left(\vec{l}_i \vec{h}_{0i} \right) = - \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i, \quad i \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Це можливо тому, що в сігма моделі в рівняннях Ландау–Ліфшиця явно враховано, що $|\vec{m}| \ll |\vec{l}|$, що дозволило з двох векторних рівнянь отримати одне. Але ж це призводить до надлишкової кількості граничних умов (16.1), що потребує явного врахування умови сігма моделі $|\vec{m}| \ll |\vec{l}|$ також і в граничних умовах.

Тому в першому випадку в сігма моделі (див. умови спрощення у (1.9) з виразу (1.6)) граничні умови (1.28) набувають вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(4\alpha_1 \left[\vec{l}_1 \times \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \right] + \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ll} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] \right) \Big|_{z=0} = 0, \\ \left(4\alpha_2 \left[\vec{l}_2 \times \frac{\partial \vec{l}_2}{\partial z} \right] + \frac{M_{01}}{M_{02}} a_{ll} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] \right) \Big|_{z=0} = 0. \end{array} \right. \quad (1.29)$$

В другому випадку (див. умови спрощення для (1.10) з виразу (1.6)) і з (1.28) слідує граничні умови:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ml} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] \Big|_{z=0} = 0, \\ \left(4\alpha_1 \left[\vec{l}_1 \times \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \right] \right) \Big|_{z=0} = 0, \\ \left(4\alpha_2 \left[\vec{l}_2 \times \frac{\partial \vec{l}_2}{\partial z} \right] \right) \Big|_{z=0} = 0. \end{array} \right. \quad (1.30)$$

В цьому випадку є надлишок кількості граничних умов, і вони, у загальному випадку, не сумісні з рівнянням Ландау–Ліфшиця в сігма-моделі (див., наприклад, [23])

$$\begin{aligned} & \left[\vec{l}_i \times \left(\alpha_i \Delta \vec{l}_i - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right) \right] + \frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} - \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} - \\ & - \beta_{ii} l_{iz} \left[\vec{l}_i \times \vec{e}_z \right] + \frac{1}{\delta_i} \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) \left[\vec{d}_i \times \vec{l}_i \right] + \frac{1}{\delta_i} \left[\vec{l}_i \times \left[\vec{h}_{0i} \times \vec{d}_i \right] \right] - \\ & - \frac{1}{\delta_i} \left[\vec{l}_i \times \vec{h}_{0i} \right] \left(\vec{l}_i \vec{h}_{0i} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

Зауважимо, що права частина у (1.31) дорівнює нулеві тому, що тепер і надалі у нашій задачі ми будемо розглядати випадок постійного магнітного поля.

Тому очевидно, що другий випадок не придатний для коректного опису в рамках сігма моделі, і в другому випадку потрібно використовувати граничні умови (1.30) разом з загальними рівняннями Ландау–Ліфшиця для векторів

$\vec{l}$ і $\vec{m}$, що сліднують з (1.22), (1.23):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{\gamma M_{01}} \frac{\partial \vec{m}_1}{\partial t} &= \left[\left(4 \left(-\alpha'_1 \Delta \vec{m}_1 + \beta_{21} \vec{e}_z m_{1z} + [\vec{l}_1 \times \vec{d}_1] - \vec{h}_{01} \right) \right) \times \vec{m}_1 \right] + \\ &+ \left[\left(4 \left(-\alpha_1 \Delta \vec{l}_1 + \beta_{11} \vec{e}_z l_{1z} + [\vec{d}_1 \times \vec{m}_1] \right) \right) \times \vec{l}_1 \right], \\ \frac{2}{\gamma M_{01}} \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial t} &= \left[\left(4 \left(\delta_1 \vec{m}_1 - \alpha'_1 \Delta \vec{m}_1 + \beta_{21} \vec{e}_z m_{1z} + [\vec{l}_1 \times \vec{d}_1] - \vec{h}_{01} \right) \right) \times \right. \\ &+ \delta(z) \frac{M_{02}}{M_{01}} \left(a_{mm} \vec{m}_2 + a_{ml} \vec{l}_2 \right) \left. \right] \times \vec{l}_1 + \\ &+ \left[\left(4 \left(-\alpha_1 \Delta \vec{l}_1 + \beta_{11} \vec{e}_z l_{1z} + [\vec{d}_1 \times \vec{m}_1] \right) \right) \times \vec{m}_1 \right], \end{aligned} \right. \quad (1.32)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{\gamma M_{02}} \frac{\partial \vec{m}_2}{\partial t} &= \left[\left(4 \left(-\alpha'_2 \Delta \vec{m}_2 + \beta_{22} \vec{e}_z m_{2z} + [\vec{l}_2 \times \vec{d}_2] - \vec{h}_{02} \right) \right) \times \vec{m}_2 \right] + \\ &+ \left[\left(4 \left(-\alpha_2 \Delta \vec{l}_2 + \beta_{12} \vec{e}_z l_{2z} + [\vec{d}_2 \times \vec{m}_2] \right) \right) \times \vec{l}_2 \right], \\ \frac{2}{\gamma M_{02}} \frac{\partial \vec{l}_2}{\partial t} &= \left[\left(4 \left(\delta_2 \vec{m}_2 - \alpha'_2 \Delta \vec{m}_2 + \beta_{22} \vec{e}_z m_{2z} + [\vec{l}_2 \times \vec{d}_2] - \vec{h}_{02} \right) \right) \times \right. \\ &+ \delta(z) \frac{M_{01}}{M_{02}} \left(a_{mm} \vec{m}_1 + a_{ml} \vec{l}_1 \right) \left. \right] \times \vec{l}_2 + \\ &+ \left[\left(4 \left(-\alpha_2 \Delta \vec{l}_2 + \beta_{12} \vec{e}_z l_{2z} + [\vec{d}_2 \times \vec{m}_2] \right) \right) \times \vec{m}_2 \right]. \end{aligned} \right. \quad (1.33)$$

По-перше, застосуємо довгохвильове наближення. Конкретно — будемо вважати, що довжина спінової хвилі λ_{SW} , яка збуджується у досліджуваній системі, набагато перевищує обидва параметри пари антиферромагнетиків

$$\frac{\alpha_1}{a_{ll}} = \frac{\alpha_1}{A_{11} - A_{12} - A_{21} + A_{22}}, \quad \frac{\alpha_2}{a_{ll}} = \frac{\alpha_2}{A_{11} - A_{12} - A_{21} + A_{22}},$$

що мають розмірність довжини (для типових значень $\alpha_i \approx 10^{-12} \text{ см}^{-2}$, $i = 1, 2$; $\lambda_{SW} \sim 10^{-6} \text{ см}$, звідси слідує оцінка $a_{ll} \gg 10^{-6} \text{ см}$, що відповідає характерним значенням цього параметру для типових пар антиферромагнетиків).

У такому випадку, зауважимо, що при наявності спінової хвилі має місце співвідношення $\left| \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial z} \right| \sim \frac{|\vec{l}_i|}{\lambda_{SM}}$. А при виконанні додаткової умови $M_{01} \sim M_{02}$ в граничних умовах (1.26), (1.27) можна знехтувати доданками, що містять

$$\left[\vec{l}_i \times \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial z} \right], \quad i = 1, 2,$$

оскільки

$$\left| a_{ll} \left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \right] \right| \gg \left| 4\alpha_i \left[\vec{l}_i \times \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial z} \right] \right|, \quad i = 1, 2.$$

У такому випадку (1.26), (1.27) при $a_{ll}^2 + a_{lm}^2 + a_{ml}^2 \neq 0$ вироджуються в одну умову

$$\left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \right] \Big|_{z=0} = 0. \quad (1.34)$$

Крім того, незалежно від можливості застосування довгохвильового наближення при виконанні умови $\alpha_{ml} = \alpha_{lm} = 0$ системи рівнянь (1.26), (1.27) вироджуються у систему двох умов

$$\begin{cases} \left[\vec{l}_1 \left(4\alpha_1 \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} - \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ll} \vec{l}_2 \right) \right] \Big|_{z=0} = 0, \\ \left[\vec{l}_2 \left(4\alpha_2 \frac{\partial \vec{l}_2}{\partial z} + \frac{M_{01}}{M_{02}} a_{ll} \vec{l}_1 \right) \right] \Big|_{z=0} = 0, \end{cases} \quad (1.35)$$

аналогічних (після заміни $\vec{l}_i \rightarrow \vec{m}_i, i = 1, 2$) до відомих граничних умов на інтерфейсі між двома феромагнетиками (див., наприклад, [14]).

Нарешті, у випадку, коли довгохвильове наближення є незастосовним, та, крім того, $\alpha_{ml} \neq \alpha_{lm}$, то граничні умови (1.26), (1.27) виконуються, зокрема, при $\vec{l}_2 = 0$ (що відповідає повному відбиванню досліджуваної спінової хвилі від інтерфейсу). У такому випадку, виключаючи з систем рівнянь (1.26), (1.27) усі доданки, що містять $\vec{l}_2$, знаходимо, що ця система вироджується в одну умову

$$\left[\vec{l}_1 \times \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \right] \Big|_{z=0} = 0. \quad (1.36)$$

Наявність множника чотири в перших доданках лівих частин рівнянь (1.35) та вираз для константи a_{ll} (що враховує 4-ту константу однорідного обміну між підгратками АФМ) обумовлюється відповідним вибором позначень для констант в енергії АФМ.

Можливості узагальнення розглянутої моделі (наприклад, загалом різні гіромагнітні відношення двох АФМ) не впливають на кінцевий результат — граничні умови (1.34)–(1.36).

Висновки до розділу 1

У даному розділі для кожного АФМ, які утворюють магнетний кристал, відповідна система рівнянь Ландау–Ліфшиця зведена до еквівалентної системи рівнянь відносно безрозмірного вектору намагніченості та безрозмірного вектору антиферомагнетизму, знайдено граничні умови та досліджено їх сумісність (або несумісність) з системою рівнянь Ландау–Ліфшиця для кожного АФМ, зокрема, у випадку наявності (або відсутності) сігма-моделі, довгохвильового наближення.

Знайдено систему граничних умов відносно векторів антиферомагнетизму, досліджено її сумісність з системою рівнянь Ландау–Ліфшиця для кожного АФМ, зокрема, для сігма-моделі, для випадка довгохвильового наближення.

Матеріали першого розділу викладено в публікаціях здобувача [1], [3].

РОЗДІЛ 2

РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛАНДАУ–ЛІФШИЦЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ГРАНИЧНИХ УМОВ ДЛЯ ВЕКТОРА АНТИФЕРОМАГНЕТИЗМУ В МАГНОННОМУ КРИСТАЛІ

Даний розділ присвячений знаходженню швидкостей нелінійних спінових хвиль у явному вигляді для кожного АФМ, які відповідають граничним умовам відносно векторів антиферромагнетизму для певного класу розв'язків системи рівнянь Ландау–Ліфшиця за умов сігма-моделі та довгохвильового наближення.

Розділ складається з трьох підрозділів.

У першому підрозділі знайдено граничні умови на інтерфейсах, досліджено їх частинні випадки.

У другому підрозділі система рівнянь Ландау–Ліфшиця для кожного АФМ за допомогою переходу до сферичної системи координат зводиться до нелінійної системи відносно кутів (азимутального та полярного для векторів антиферромагнетизму) та відповідної швидкості спінової хвилі. При цьому, клас розв'язків відповідних нелінійних систем досліджується методами, аналогічними тим, які застосовувались при побудові у роботі [26] розв'язків для моделі одноосьового ферромагнетика.

У третьому підрозділі знайдено явні формули швидкостей спінових хвиль для граничних умов відносно векторів антиферромагнетизму. При цьому, швидкості спінової хвилі знайдено для таких випадків в досліджуваному магнонному кристалі: докритичне поширення хвилі намагніченості в обох АФМ, поширення надкритичної хвилі намагніченості в обох АФМ, розповсюдження докритичної хвилі намагніченості в одному АФМ та надкритичної хвилі намагніченості в іншому. Для кожного випадку обраховано період та частота відповідної спінової хвилі, знайдено умову застосовності довгохвильового наближення, проведено чисельні експерименти.

2.1 Граничні умови на інтерфейсах

Розглянемо періодично структурований антиферомагнетик: одновимірну періодичну структуру, яка складається з двох типів однорідних секцій-шарів (з антиферомагнетику 1 та з антиферомагнетику 2), які чергуються. Всі шари мають однакову товщину L , тому просторовий період всієї системи дорівнює $2L$.

Нехай як антиферомагнетики, так і границі між ними задовольняють умовам наведеної вище моделі у розділі 1 (антиферомагнетики є одноосьовими двоїдгратковими, взаємодією Дзялошинського–Морії, взагалі, знехтувати не можна, вісь магнітної анізотропії обох АФМ спрямовано однаково, перпендикулярно до інтерфейсів між ними). Тоді граничні умови на інтерфейсах між АФМ в позначеннях наведеної вище моделі можна записати наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ml} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] \Big|_{z=NL} = 0, \\ a_{lm} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] \Big|_{z=NL} = 0, \\ \left(4\alpha_1 \left[\vec{l}_1 \times \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \right] + \frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ll} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] \right) \Big|_{z=NL} = 0, \\ \left(4\alpha_2 \left[\vec{l}_2 \times \frac{\partial \vec{l}_2}{\partial z} \right] + \frac{M_{01}}{M_{02}} a_{ll} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] \right) \Big|_{z=NL} = 0, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

де N — будь-яке ціле число (вісь Oz спрямовано уздовж спільної осі магнітної анізотропії двох АФМ, при цьому, початок її відліку обрано на одному з інтерфейсів).

Очевидно, що формули (2.1) (для кожного цілого N) узагальнюють формули (1.28) (де $N = 0$, $z = 0$) на випадок довільних інтерфейсів $z = NL$.

Якщо коефіцієнти a_{lm} та a_{ml} не дорівнюють нулю одночасно, тобто

$$(A_{11} - A_{12} + A_{21} - A_{22})^2 + (A_{11} + A_{12} - A_{21} - A_{22})^2 \neq 0, \quad (2.2)$$

то система рівнянь (2.1) еквівалентна наступній

$$\begin{cases} \left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \right] \Big|_{z=NL} = 0, \\ \left[\vec{l}_1 \times \frac{\partial \vec{l}_1}{\partial z} \right] \Big|_{z=NL} = 0, \\ \left[\vec{l}_2 \times \frac{\partial \vec{l}_2}{\partial z} \right] \Big|_{z=NL} = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Дослідимо умову (2.2). Якщо $a_{lm} = a_{ml} = 0$, то виконується наступна система рівнянь:

$$\begin{cases} A_{11} - A_{12} + A_{21} - A_{22} = 0, \\ A_{11} + A_{12} - A_{21} - A_{22} = 0, \end{cases}$$

звідки слідують рівності $A_{11} = A_{22}$, $A_{12} = A_{21}$. Таким чином, перехід від системи (2.1) до (2.2) можливий за умови

$$(A_{11} - A_{22})^2 + (A_{12} - A_{21})^2 \neq 0.$$

2.2 Система рівнянь Ландау-Ліфшиця для антиферомагнетиків в сігма-моделі в сферичній системі координат для вектора антиферомагнетизму

Граничні умови (2.3) мають бути застосовані до розв'язків рівнянь Ландау-Ліфшиця (1.22), (1.23). Для знаходження розв'язків цих рівнянь застосуємо сферичні координати (r, θ, φ) з формулами переходу до декартових

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

Зауваживши, що в рамках моделі, яка використовується в даній задачі, довжину вектора антиферомагнетизму обох АФМ можна вважати наближено сталою $\left(\left| \vec{L}^{(i)} \right| = L_0^{(i)} = \text{const} \right)$, зобразимо вектор антиферомагнетизму у вигляді

$$\vec{L}^{(i)} = L_0^{(i)} (\vec{e}_x \sin \theta_i \cos \varphi_i + \vec{e}_y \sin \theta_i \sin \varphi_i + \vec{e}_z \cos \theta_i), i = 1, 2,$$

де $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ — орти осей Ox , Oy та Oz , відповідно.

Таким чином, $\theta_i(x, y, z, t)$ та $\varphi_i(x, y, z, t)$ — азимутальний та полярний кути векторів $\vec{L}^{(i)}$, відповідно, причому θ_i може змінюватись від $-\pi$ до π , а діапазон зміни φ_i є необмеженим (з урахуванням умови періодичності та найменшим додатним періодом рівним 2π). Переходячи до безрозмірного вектору антиферомагнетизму, враховуючи (1.1), запишемо відповідно

$$\begin{cases} l_{ix} = \sin \theta_i \cos \varphi_i, \\ l_{iy} = \sin \theta_i \sin \varphi_i, \\ l_{iz} = \cos \theta_i, i = 1, 2. \end{cases} \quad (2.4)$$

При підстановці вектора антиферомагнетизму в зазначеному вигляді у системи рівнянь Ландау–Ліфшиця (1.22), (1.23) зауважимо, що доданки в цих рівняннях, які містять дельта-функцію $\delta(z)$, враховують вплив інтерфейсу на спінову хвилю — і, отже, після накладання граничних умов (2.3), які власне враховують цей вплив, можуть бути знехтувані при знаходженні векторів $\vec{m}_i$, $\vec{l}_i$, $i = 1, 2$, всередині антиферомагнітних секцій.

Після застосування зазначеного вище спрощення системи рівнянь Ландау–Ліфшиця (1.22), (1.23) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{2}{\gamma M_{0i}} \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial t} = \left[4 \left(\left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] - \vec{h}_{0i} \right) \times \vec{m}_i \right] + \\ + \left[\left(4 \left(-\alpha_i \Delta \vec{l}_i + \beta_{ii} \vec{e}_z l_{iz} + \left[\vec{d}_i \times \vec{m}_i \right] \right) \right) \times \vec{l}_i \right], \\ \frac{2}{\gamma M_{0i}} \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} = \left[\left(4 \left(\delta_i \vec{m}_i + \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] - \vec{h}_{0i} \right) \right) \times \vec{l}_i \right], i = 1, 2, \end{cases}$$

або, після використання відомих властивостей векторного добутку

$$\begin{aligned} \left[\left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] \times \vec{m}_i \right] + \left[\left[\vec{d}_i \times \vec{m}_i \right] \times \vec{l}_i \right] &= - \left[\left[\vec{m}_i \times \vec{l}_i \right] \times \vec{d}_i \right] = \\ &= - \left(\vec{l}_i \left(\vec{m}_i \vec{d}_i \right) - \vec{m}_i \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) \right) = \vec{m}_i \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) - \vec{l}_i \left(\vec{m}_i \vec{d}_i \right), \end{aligned}$$

у такій формі

$$\begin{cases} \frac{2}{\gamma M_{0i}} \frac{\partial \vec{m}_i}{\partial t} = 4 \left(\left[\vec{m}_i \times \vec{h}_{0i} \right] + \left[\left(-\alpha_i \Delta \vec{l}_i + \beta_{ii} \vec{e}_z l_{iz} \right) \times \vec{l}_i \right] + \right. \\ \left. + \vec{m}_i \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) - \vec{l}_i \left(\vec{m}_i \vec{d}_i \right) \right), \\ \frac{2}{\gamma M_{0i}} \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} = \left[\left(4 \left(\delta_i \vec{m}_i + \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] - \vec{h}_{0i} \right) \right) \times \vec{l}_i \right], i = 1, 2. \end{cases} \quad (2.5)$$

Виключимо з цієї системи рівнянь безрозмірні вектори намагніченості $\vec{m}_i$, $i = 1, 2$. Для цього виразимо з другого рівняння системи (2.5). Домноживши це рівняння векторно на $\vec{l}_i$, $i = 1, 2$, отримаємо

$$\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] = \left[\left(4 \left(\delta_i \vec{m}_i + [\vec{l}_i \times \vec{d}_i] - \vec{h}_{0i} \right) \right) \times \vec{l}_i \right] \times \vec{l}_i.$$

Зауважуючи, що $|\vec{l}_i| = 1$, $i = 1, 2$, та здійснюючи необхідні перетворення, одержуємо для довільного вектора $\vec{a}$:

$$[\vec{a} \times \vec{l}_i] \times \vec{l}_i = -\vec{a} + (\vec{a} \vec{l}_i) \vec{l}_i, i = 1, 2,$$

зокрема, при $[\vec{a} \times \vec{l}_i] \times \vec{l}_i = -\vec{a}$ при $\vec{a} \perp \vec{l}_i$, $i = 1, 2$. Оскільки $[\vec{l}_i \times \vec{d}_i] \perp \vec{l}_i$, $\vec{m}_i \perp \vec{l}_i$ (останнє є наслідком того, що густина магнітного моменту підграток обох АФМ є наближено однаковою за модулем $|\vec{M}_1^{(i)}| \approx |\vec{M}_2^{(i)}|$, $i = 1, 2$, та протилежною за напрямком, тож для кожного $i \in \{1, 2\}$ вектор $\vec{M}_1^{(i)} + \vec{M}_2^{(i)} \uparrow\uparrow \vec{m}_i$ і, отже, до вектору $\vec{M}_1^{(i)} - \vec{M}_2^{(i)} \uparrow\uparrow \vec{l}_i$). Таким чином,

$$\left[\left(\delta_i \vec{m}_i + [\vec{l}_i \times \vec{d}_i] - \vec{h}_{0i} \right) \times \vec{l}_i \right] \times \vec{l}_i = - \left(\delta_i \vec{m}_i + [\vec{l}_i \times \vec{d}_i] - \vec{h}_{0i} \right) - (\vec{h}_{0i} \vec{l}_i) \vec{l}_i,$$

звідки отримуємо

$$\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] = -4 \left(\delta_i \vec{m}_i + [\vec{l}_i \times \vec{d}_i] - \vec{h}_{0i} \right) - 4 (\vec{h}_{0i} \vec{l}_i) \vec{l}_i, i = 1, 2.$$

Виражаючи звідси $\vec{m}_i$, $i = 1, 2$, одержуємо

$$\begin{aligned} \vec{m}_i &= \frac{1}{4\delta_i} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 (\vec{h}_{0i} \vec{l}_i) \vec{l}_i - 4 [\vec{l}_i \times \vec{d}_i] + 4\vec{h}_{0i} \right), \\ \vec{m}_i &= \frac{1}{\delta_i} \left(-\frac{2}{4\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - (\vec{h}_{0i} \vec{l}_i) \vec{l}_i - [\vec{l}_i \times \vec{d}_i] + \vec{h}_{0i} \right), i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

далі, підставляючи в перше рівняння системи (2.5), маємо

$$\begin{aligned} \frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] &= 4 \left([\vec{m}_i \times \vec{h}_{0i}] + \right. \\ &+ \left. \left[\left(-\alpha_i \Delta \vec{l}_i + \beta_{ii} \vec{e}_z l_{iz} \right) \times \vec{l}_i \right] + \vec{m}_i (\vec{l}_i \vec{d}_i) - \vec{l}_i (\vec{m}_i \vec{d}_i) \right), \end{aligned}$$

як наслідок, отримуємо диференціальне рівняння для безрозмірного вектору антиферомагнетизму $\vec{l}_i$, $i = 1, 2$, яке вже не містить безрозмірної густини намагніченості $\vec{m}_i$, $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\gamma M_{0i}} \frac{1}{4\delta_i} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4 \vec{h}_{0i} \right) = \\ & = 4 \left(\left[\frac{1}{4\delta_i} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4 \vec{h}_{0i} \right) \times \vec{h}_{0i} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(-\alpha_i \Delta \vec{l}_i + \beta_{ii} \vec{e}_z l_{iz} \right) \times \vec{l}_i \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4\delta_i} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4 \vec{h}_{0i} \right) \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) - \right. \\ & \quad \left. - \vec{l}_i \left(\vec{d}_i \frac{1}{4\delta_i} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4 \vec{h}_{0i} \right) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Візьмемо спочатку похідну за часом у лівій частині одержаного рівняння, вважаючи при цьому вектор Дзялошинського–Морії $\vec{d}_i$ в обох АФМ сталим, так що $\frac{\partial \vec{d}_i}{\partial t} = 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\frac{1}{2\gamma M_{0i}} \left[\vec{l}_i \times \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right] - \left(\frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - \left(\vec{h}_{0i} \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \right) \vec{l}_i - \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} - \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{d}_i \right] + \frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \right) = \\ & = 4 \left(\left[\frac{1}{4\delta_i} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4 \vec{h}_{0i} \right) \times \vec{h}_{0i} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(-\alpha_i \Delta \vec{l}_i + \beta_{ii} \vec{e}_z l_{iz} \right) \times \vec{l}_i \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4\delta_i} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4 \vec{h}_{0i} \right) \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) - \right. \\ & \quad \left. - \vec{l}_i \left(\vec{d}_i \frac{1}{4\delta_i} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4 \vec{h}_{0i} \right) \right) \right) \right), \end{aligned}$$

або після перегрупування, одержуємо наступні послідовні рівносильні перетворення останнього рівняння

$$\left[\vec{l}_i \times \left(\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \frac{1}{2\gamma M_{0i}} \right) \right] + 4\alpha_i \left[\Delta \vec{l}_i \times \vec{l}_i \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(- \left(\frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - \left(\vec{h}_{0i} \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \right) \vec{l}_i - \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} - \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{d}_i \right] + \frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \right) = \\
& = 4 \left(\left[\frac{1}{4\delta_i} \left(- \frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4 \vec{h}_{0i} \right) \times \vec{h}_{0i} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \beta_{ii} l_{iz} \left[\vec{e}_z \times \vec{l}_i \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4\delta_i} \left(- \frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4 \vec{h}_{0i} \right) \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) - \right. \\
& \quad \left. - \vec{l}_i \left(\vec{d}_i \frac{1}{4\delta_i} \left(- \frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4 \vec{h}_{0i} \right) \right) \right) \right) \Bigg) , \\
& \quad \left[\vec{l}_i \times \left(\frac{1}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} - 4 \alpha_i \Delta \vec{l}_i \right) \right] + \\
& \quad + \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(- \left(\frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - \left(\vec{h}_{0i} \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \right) \vec{l}_i - \right. \\
& \quad \left. - \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} - \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{d}_i \right] + \frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \right) = \\
& = 4 \left(\left[\frac{1}{4\delta_i} \left(- \frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4 \vec{h}_{0i} \right) \times \vec{h}_{0i} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \beta_{ii} l_{iz} \left[\vec{e}_z \times \vec{l}_i \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4\delta_i} \left(- \frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4 \vec{h}_{0i} \right) \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) - \right. \\
& \quad \left. - \vec{l}_i \left(\vec{d}_i \frac{1}{4\delta_i} \left(- \frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4 \vec{h}_{0i} \right) \right) \right) \right) \Bigg) , \\
& \quad \left[\vec{l}_i \times \left(4 \alpha_i \Delta \vec{l}_i - \frac{1}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right) \right] + \\
& \quad + \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\left(\frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i + \left(\vec{h}_{0i} \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \right) \vec{l}_i + \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} + \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{d}_i \right] - \frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \right) = \\
& = -4 \left(\left[\frac{1}{4\delta_i} \left(- \frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4 \vec{h}_{0i} \right) \times \vec{h}_{0i} \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\beta_{ii} l_{iz} \left[\vec{e}_z \times \vec{l}_i \right] + \\
& +\frac{1}{4\delta_i} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4\vec{h}_{0i} \right) \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) - \\
& - \vec{l}_i \left(\vec{d}_i \frac{1}{4\delta_i} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4\vec{h}_{0i} \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Перетворимо праву частину отриманого рівняння з урахуванням рівностей

$$\vec{h}_{0i} \times \vec{h}_{0i} = 0, \quad \vec{d}_i \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] = 0, \quad \left[\left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{h}_{0i} \right] \times \vec{h}_{0i} \right] = \vec{l}_i \left(\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \vec{h}_{0i} \right) - \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \left(\vec{l}_i \vec{h}_{0i} \right),$$

одержуємо:

$$\begin{aligned}
& \left[\vec{l}_i \times \left(4\alpha_i \Delta \vec{l}_i - \frac{1}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right) \right] + \\
& +\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\left(\frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i + \left(\vec{h}_{0i} \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \right) \vec{l}_i + \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} + \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{d}_i \right] - \frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \right) = \\
& = -4 \left(\left[\frac{1}{4\delta_i} \left(-4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4\vec{h}_{0i} \right) \times \vec{h}_{0i} \right] + \beta_{ii} l_{iz} \left[\vec{e}_z \times \vec{l}_i \right] + \right. \\
& \quad \left. +\frac{2}{4\delta_i \gamma M_{0i}} \left(\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \left(\vec{l}_i \vec{h}_{0i} \right) - \vec{l}_i \left(\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \vec{h}_{0i} \right) \right) \right) + \\
& +\frac{1}{4\delta_i} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] + 4\vec{h}_{0i} \right) \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) - \\
& - \vec{l}_i \left(\vec{d}_i \frac{1}{4\delta_i} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i + 4\vec{h}_{0i} \right) \right) \right),
\end{aligned}$$

здійснюємо далі перегруповання, одержуємо

$$\begin{aligned}
& \left[\vec{l}_i \times \left(4\alpha_i \Delta \vec{l}_i - \frac{1}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right) \right] + \frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} - \\
& -\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} - 4\beta_{ii} l_{iz} \left[\vec{l}_i \times \vec{e}_z \right] + \\
& +\frac{4}{\delta_i} \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) \left[\vec{d}_i \times \vec{l}_i \right] = -\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\left(\frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i + \left(\vec{h}_{0i} \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \right) \vec{l}_i + \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{d}_i \right] \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4 \left(\left[\frac{1}{4\delta_i} \left(-4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] \right) \times \vec{h}_{0i} \right] - \frac{2}{4\delta_i \gamma M_{0i}} \vec{l}_i \left(\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \vec{h}_i \right) + \right. \\
& \quad + \frac{1}{4\delta_i} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i + 4 \vec{h}_{0i} \right) \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) - \\
& \quad \left. - \vec{l}_i \left(\vec{d}_i \frac{1}{4\delta_i} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] - 4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i + 4 \vec{h}_{0i} \right) \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Враховуючи, що в правій частині останнього рівняння взаємно зникають такі попарні доданки: $\left(-\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\vec{h}_{0i} \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \right) \vec{l}_i \right)$ та $\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \vec{l}_i \left(\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \vec{h}_{0i} \right)$, $\frac{1}{\delta_i} \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right)$ та $\left(-\vec{l}_i \left(\vec{d}_i \frac{1}{\delta_i} \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i \right) \right)$, запишемо результуюче рівняння у вигляді

$$\begin{aligned}
& \left[\vec{l}_i \times \left(4\alpha_i \Delta \vec{l}_i - \frac{1}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right) \right] + \frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} - \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} - \\
& \quad - 4\beta_{ii} l_{iz} \left[\vec{l}_i \times \vec{e}_z \right] + \\
& \quad + \frac{4}{\delta_i} \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) \left[\vec{d}_i \times \vec{l}_i \right] = -\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\left(\frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i + \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{d}_i \right] \right) - \\
& \quad - 4 \left(\left[\frac{1}{4\delta_i} \left(-4 \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i - 4 \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] \right) \times \vec{h}_{0i} \right] + \right. \\
& \quad + \frac{1}{4\delta_i} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] + 4 \vec{h}_{0i} \right) \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) - \\
& \quad \left. - \vec{l}_i \left(\vec{d}_i \frac{1}{4\delta_i} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] + 4 \vec{h}_{0i} \right) \right) \right) \right),
\end{aligned}$$

та зауважуючи, що

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\delta_i} \vec{l}_i \left(\vec{d}_i \vec{h}_{0i} \right) - \frac{1}{\delta_i} \vec{h}_{0i} \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) = \frac{1}{\delta_i} \left[\left[\vec{h}_{0i} \times \vec{l}_i \right] \times \vec{d}_i \right], \\
& \frac{1}{\delta_i} \left[\left[\vec{h}_{0i} \times \vec{l}_i \right] \times \vec{d}_i \right] + \frac{1}{\delta_i} \left[\left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i \right] \times \vec{h}_{0i} \right] = \\
& = -\frac{1}{\delta_i} \left[\left[\vec{d}_i \times \vec{h}_{0i} \right] \times \vec{l}_i \right] = -\frac{1}{\delta_i} \left[\vec{l}_i \times \left[\vec{h}_{0i} \times \vec{d}_i \right] \right],
\end{aligned}$$

спростимо рівняння до вигляду

$$\left[\vec{l}_i \times \left(4\alpha_i \Delta \vec{l}_i - \frac{1}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right) \right] + \frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} - 4\beta_{ii} l_{iz} [\vec{l}_i \times \vec{e}_z] + \\
& + \frac{4}{\delta_i} (\vec{l}_i \vec{d}_i) [\vec{d}_i \times \vec{l}_i] + \frac{4}{\delta_i} [\vec{l}_i \times [\vec{h}_{0i} \times \vec{d}_i]] - \frac{4}{\delta_i} [\vec{l}_i \times \vec{h}_{0i}] (\vec{l}_i \vec{h}_{0i}) = \\
& = -\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\left(\frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i + \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{d}_i \right] \right) - \\
& -4 \left(\frac{1}{4\delta_i} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] \right) (\vec{l}_i \vec{d}_i) - \vec{l}_i \left(\vec{d}_i \frac{1}{4\delta_i} \left(-\frac{2}{\gamma M_{0i}} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Оскільки різниця

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] (\vec{l}_i \vec{d}_i) - \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \vec{l}_i \left(\vec{d}_i \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] \right) = \\
& = \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left[[\vec{l}_i \times [\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i]] \times \vec{d}_i \right] = \\
& = -\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left[\left[\left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{l}_i \right] \times \vec{l}_i \right] \times \vec{d}_i \right] = -\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left[\left(-\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i \right) \times \vec{d}_i \right],
\end{aligned}$$

то останнє рівняння набуде вигляду

$$\begin{aligned}
& \left[\vec{l}_i \times \left(4\alpha_i \Delta \vec{l}_i - \frac{1}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right) \right] + \frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} (\vec{h}_{0i} \vec{l}_i) \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} - \\
& -\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} - 4\beta_{ii} l_{iz} [\vec{l}_i \times \vec{e}_z] + \\
& + \frac{4}{\delta_i} (\vec{l}_i \vec{d}_i) [\vec{d}_i \times \vec{l}_i] + \frac{4}{\delta_i} [\vec{l}_i \times [\vec{h}_{0i} \times \vec{d}_i]] - \frac{4}{\delta_i} [\vec{l}_i \times \vec{h}_{0i}] (\vec{l}_i \vec{h}_{0i}) = \\
& = -\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\left(\frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i + \left[\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \times \vec{d}_i \right] + \left(\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \vec{d}_i \right) [\vec{l}_i \times \vec{d}_i] \right);
\end{aligned}$$

оскільки у використаній моделі можна вважати $\frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \perp \vec{l}_i$, то доданком

$\left(\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \vec{d}_i\right) \left[\vec{l}_i \times \vec{d}_i\right]$ можна знехтувати; отримуємо остаточно

$$\begin{aligned} & \left[\vec{l}_i \times \left(4\alpha_i \Delta \vec{l}_i - \frac{1}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right) \right] + \frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} - \\ & - \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} - 4\beta_{ii} l_{iz} \left[\vec{l}_i \times \vec{e}_z \right] + \\ & + \frac{4}{\delta_i} \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) \left[\vec{d}_i \times \vec{l}_i \right] + \frac{4}{\delta_i} \left[\vec{l}_i \times \left[\vec{h}_{0i} \times \vec{d}_i \right] \right] - \\ & - \frac{4}{\delta_i} \left[\vec{l}_i \times \vec{h}_{0i} \right] \left(\vec{l}_i \vec{h}_{0i} \right) = - \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\left(\frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

При заміні $\gamma M_{0i} \rightarrow 4\gamma M_{0i}$ отримане рівняння переважно співпадає з наведеним у роботі [7].

Для простоти розглянемо постійне поле $\vec{h}_{0i}$, тоді доданок $\left(\frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \vec{l}_i\right) \vec{l}_i = 0$. У вище наведеному виведенні рівнянь використовувалося наближені співвідношення: $\vec{l}_i^2 \approx 1, i = 1, 2$. Візьмемо похідну за часом:

$$2\vec{l}_i \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} = 0, i = 1, 2.$$

Оскільки $\left|\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t}\right| \neq 0, \left|\vec{l}_i\right| \neq 0, i = 1, 2$, то в цій моделі $\frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} \perp \vec{l}_i, i = 1, 2$.

Отже, оберемо рівняння для безрозмірного вектору антиферромагнетизму $\vec{l}_i, i = 1, 2$, відповідно до [7], що у позначеннях нашого розрахунку (тобто $\vec{l}_i^2 \approx 1, \vec{h}_{0i} = \text{const}$, заміна $\gamma M_{0i} \rightarrow 4\gamma M_{0i}$ при $i = 1, 2$) відповідає наступній формі:

$$\begin{aligned} & \left[\vec{l}_i \times \left(\alpha_i \Delta \vec{l}_i - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right) \right] + \frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\vec{h}_{0i} \vec{l}_i \right) \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} - \\ & - \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} - \beta_{ii} l_{iz} \left[\vec{l}_i \times \vec{e}_z \right] + \\ & + \frac{1}{\delta_i} \left(\vec{l}_i \vec{d}_i \right) \left[\vec{d}_i \times \vec{l}_i \right] + \frac{1}{\delta_i} \left[\vec{l}_i \times \left[\vec{h}_{0i} \times \vec{d}_i \right] \right] - \frac{1}{\delta_i} \left[\vec{l}_i \times \vec{h}_{0i} \right] \left(\vec{l}_i \vec{h}_{0i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Підставляючи в останнє рівняння вирази для $\vec{l}_i, i = 1, 2$, у вигляді (2.4), і припустивши, що зовнішнє магнітне поле та вектор Дзялошинського–Морії для обох АФМ спрямовані уздовж осі магнітної анізотропії, так що

$$\vec{h}_{0i} = h_{0i} \vec{e}_z, \vec{d}_i = d_i \vec{e}_z, i = 1, 2,$$

приходимо до висновку, що рівняння (2.8) у покомпонентному вигляді (проекції на осі Ox , Oy , Oz відповідно) для кожного АФМ з номером $i \in \{1, 2\}$ набуває вигляду (див. доведення у додатку В):

$$\left\{ \begin{aligned} & \alpha_i \left(-\sin \varphi_i \Delta \theta_i - 2 \cos^2 \theta_i \cos \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i + \right. \\ & + \sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \\ & - \sin \theta_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \Delta \varphi_i) - \\ & - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \left(-\sin \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - 2 \cos^2 \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \right. \\ & + \sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 - \sin \theta_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \Big) + \\ & + h_{0i} \cos \theta_i \left(\frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\cos \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} - \sin \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right) - \right. \\ & - \frac{1}{\delta_i} h_{0i} \sin \theta_i \sin \varphi_i \Big) - \\ & - \frac{1}{\delta_i} \sin \theta_i \cos \theta_i \sin \varphi_i d_i^2 - \beta_{ii} \sin \theta_i \cos \theta_i \sin \varphi_i = 0, \\ & \alpha_i \left(\cos \varphi_i \Delta \theta_i - 2 \cos^2 \theta_i \sin \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \sin \theta_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \right. \\ & - \sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \Delta \varphi_i) - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \left(\cos \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - 2 \cos^2 \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \right. \\ & - \sin \theta_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 - \sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \Big) + \\ & + h_{0i} \cos \theta_i \left(\frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\cos \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + \sin \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{\delta_i} h_{0i} \sin \theta_i \cos \varphi_i \Big) + \\ & + \frac{1}{\delta_i} \sin \theta_i \cos \theta_i \cos \varphi_i d_i^2 + \beta_{ii} \sin \theta_i \cos \theta_i \cos \varphi_i = 0, \\ & \alpha_i \left(2 \sin \theta_i \cos \theta_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i + \sin^2 \theta_i \Delta \varphi_i \right) - \\ & - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \left(2 \sin \theta_i \cos \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sin^2 \theta_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) + \\ & \left(-h_{0i} \frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \cos \theta_i \sin \theta_i - \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial h_{0i}}{\partial t} \right) = 0, \end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

де перше рівняння даної системи — проекція векторного рівняння (2.8) на вісь Ox , друге — на вісь Oy , третє — на вісь Oz , відповідно.

Домножимо знайдену вище x -компоненту рівняння (2.8) на $(-\sin \varphi_i)$, а y -компоненту на $\cos \varphi_i$, далі, проведемо додавання таким чином перетворених рівнянь, одержуємо:

$$\begin{aligned}
& \alpha_i \left(\sin^2 \varphi_i \Delta \theta_i + 2 \cos^2 \theta_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \sin \theta_i \sin^2 \varphi_i \cos \theta_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \right. \\
& \quad \left. - \sin \theta_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \Delta \varphi_i \right) - \\
& \quad - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \left(\sin^2 \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} + 2 \cos^2 \theta_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \right. \\
& \quad \left. - \sin \theta_i \sin^2 \varphi_i \cos \theta_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 + \sin \theta_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) + \\
& \quad - h_{0i} \cos \theta_i \left(\frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\cos \theta_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} - \sin \theta_i \sin^2 \varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\delta_i} h_{0i} \sin \theta_i \sin^2 \varphi_i \right) + \\
& \quad + \left(\frac{d_i^2}{\delta_i} + \beta_{ii} \right) \sin \theta_i \cos \theta_i \sin^2 \varphi_i + \\
& \quad + \alpha_i \left(\cos^2 \varphi_i \Delta \theta_i - 2 \cos^2 \theta_i \sin \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \right. \\
& \quad \left. - \sin \theta_i \cos \theta_i \cos^2 \varphi_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \sin \theta_i \cos \theta_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i \Delta \varphi_i \right) - \\
& \quad - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \left(\cos^2 \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - 2 \cos^2 \theta_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \right. \\
& \quad \left. - \sin \theta_i \cos \theta_i \cos^2 \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 - \sin \theta_i \cos \theta_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) + \\
& \quad + h_{0i} \cos \theta_i \left(\frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\cos \theta_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + \sin \theta_i \cos^2 \varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\delta_i} h_{0i} \sin \theta_i \cos^2 \varphi_i \right) + \\
& \quad - \left(\frac{d_i^2}{\delta_i} + \beta_{ii} \right) \sin \theta_i \cos \theta_i \cos^2 \varphi_i = 0.
\end{aligned}$$

Перетворюємо останнє рівняння до вигляду

$$\alpha_i \left(\Delta \theta_i - \sin \theta_i \cos \theta_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 \right) - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \left(\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - \sin \theta_i \cos \theta_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 \right) +$$

$$+h_{0i} \cos \theta_i \left(\frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \sin \theta_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{1}{\delta_i} h_{0i} \sin \theta_i \right) + \left(\frac{d_i^2}{\delta_i} + \beta_{ii} \right) \sin \theta_i \cos \theta_i = 0.$$

Комбінуючи це рівняння з отриманою вище Oz -компонентою вихідного рівняння отримуємо остаточно систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \Delta \theta_i - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} + \\ + \sin \theta_i \cos \theta_i \left(-\alpha_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 + \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{d_i^2}{\delta_i} + \beta_{ii} \right) + \right. \\ \left. + h_{0i} \left(\frac{4}{|\gamma| M_{0i} \delta_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{1}{\delta_i} h_{0i} \right) \right), \\ 2 \sin \theta_i \cos \theta_i \left(\alpha_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - h_{0i} \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right) + \\ + \sin^2 \theta_i \left(\alpha_i \Delta \varphi_i - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) - \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial h_{0i}}{\partial t} = 0. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Третього рівняння в сігма моделі не може бути, так як $\vec{l}_i^2 \approx 1$, $i = 1, 2$. Тому незалежними є тільки дві проекції вектора $\vec{l}_i$, $i = 1, 2$, в сферичній системі координат, тому маємо лише два незалежних рівняння.

Отже, рівняння (2.10) рівносильне рівнянням (2.8) та (2.9) відповідно.

Розпишемо аналогічно (2.7) у загальному випадку, коли хоча б одне з h_{0i} , $i \in \{1, 2\}$, не є тотожною сталою. Для цього, враховуючи рівність

$$-\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\left(\frac{\partial h_{0i}}{\partial t} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i \right) = -\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial h_{0i}}{\partial t} \cos \theta_i \begin{pmatrix} \sin \theta_i \sin \varphi_i \\ -\sin \theta_i \cos \varphi_i \\ 0 \end{pmatrix},$$

приходимо до висновку, що відповідний доданок для Ox -компоненти рівняння зміниться на величину $\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial h_{0i}}{\partial t} \cos \theta_i \sin \theta_i \sin \varphi_i$, відповідний доданок для Oy -компоненти рівняння — на величину $\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial h_{0i}}{\partial t} \cos \theta_i \sin \theta_i \sin \varphi_i$, відповідний доданок для Oz -компоненти рівняння — на величину $\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial h_{0i}}{\partial t} \cos^2 \theta_i$.

Оскільки

$$-\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial h_{0i}}{\partial t} + \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial h_{0i}}{\partial t} \cos^2 \theta_i = -\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial h_{0i}}{\partial t} \sin^2 \theta_i,$$

то друге рівняння в (2.10) з урахуванням цього доданку перепишеться у ви-

гляді

$$2 \sin \theta_i \cos \theta_i \left(\alpha_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \frac{h_{0i}}{2} \frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right) +$$

$$+ \sin^2 \theta_i \left(\alpha_i \Delta \varphi_i - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) - \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial h_{0i}}{\partial t} \sin^2 \theta_i = 0.$$

Зауважимо, що з огляду на рівність

$$\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial h_{0i}}{\partial t} \cos \theta_i \sin \theta_i \cos \varphi_i (-\sin \varphi_i) +$$

$$+ \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial h_{0i}}{\partial t} \cos \theta_i \sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i = 0,$$

перше рівняння системи (2.10) не зміниться після врахування доданку $\left(-\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\left(\frac{\partial h_{0i}}{\partial t} \vec{l}_i \right) \vec{l}_i \right) \right)$.

Введемо позначення для ω_{Hi} , c_i та ω_{0i} :

$$\omega_{Hi} = |\gamma| H_{0i} = \frac{|\gamma| M_{0i} h_{0i}}{2}, \quad h_{0i} \equiv |\vec{h}_i| = \frac{2\omega_{Hi}}{|\gamma| M_{0i}}, \quad c_i = \frac{|\gamma| M_{0i}}{2} \sqrt{\alpha_i \delta_i},$$

$$(\omega_{0i})^2 = \frac{c_i^2}{\alpha_i} \left(\frac{d_i^2}{\delta_i} + \beta_{ii} \right) = \frac{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i}{4} \left(\frac{d_i^2}{\delta_i} + \beta_{ii} \right).$$

Тоді (2.10) набуває вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \Delta \theta_i - \frac{\alpha_i}{c_i^2} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} + \sin \theta_i \cos \theta_i \left(-\alpha_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 + \frac{\alpha_i}{c_i^2} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{\alpha_i}{c_i^2} (\omega_{0i})^2 + \right. \\ \left. + \frac{2\omega_{Hi}}{|\gamma| M_{0i}} \left(\frac{4}{|\gamma| M_{0i} \delta_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{1}{\delta_i} \frac{2\omega_{Hi}}{|\gamma| M_{0i}} \right) \right) = 0, \\ 2 \sin \theta_i \cos \theta_i \left(\alpha_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \frac{\alpha_i}{c_i^2} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \frac{\omega_{Hi}}{|\gamma| M_{0i}} \frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right) + \\ + \sin^2 \theta_i \left(\alpha_i \Delta \varphi_i - \frac{\alpha_i}{c_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) - \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{2}{|\gamma| M_{0i}} \frac{\partial \omega_{Hi}}{\partial t} = 0. \end{array} \right.$$

Здійснюючи елементарні рівносильні перетворення одержаної системи, переписуємо її у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} c_i^2 \Delta \theta_i - \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - \left(c_i^2 \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \omega_{Hi} \right)^2 - \omega_{0i}^2 \right) \sin \theta_i \cos \theta_i = 0, \\ c_i^2 \sin^2 \theta_i \Delta \varphi_i + c_i^2 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\sin^2 \theta_i) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\sin^2 \theta_i) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\sin^2 \theta_i) \right) - \\ - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \omega_{Hi} \right) \frac{\partial}{\partial t} (\sin^2 \theta_i) - \sin^2 \theta_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} - \frac{\partial \omega_{Hi}}{\partial t} = 0. \end{array} \right.$$

Перетворюючи друге рівняння останньої системи, одержуємо рівносильне рівняння

$$c_i^2 \operatorname{div} \left(\sin^2 \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\sin^2 \theta_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \omega_{Hi} \right) \right) - \sin^2 \theta_i \frac{\partial \omega_{Hi}}{\partial t} - \frac{\partial \omega_{Hi}}{\partial t} = 0.$$

Отже, як ми бачимо, у загальному випадку друге рівняння містить доданок, кратний $\frac{\partial \omega_{Hi}}{\partial t}$, у той час, як у постійному магнітному полі даний доданок тотожно рівний нулеві.

Якщо врахувати доданок $\left(-\frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} \vec{l}_i \right) \right) \vec{l}_i$ у другому рівнянні отриманої системи за умови змінного за часом магнітного поля, то потрібно зробити заміну $\frac{\partial \omega_{Hi}}{\partial t} \rightarrow \sin^2 \theta_i \frac{\partial \omega_{Hi}}{\partial t}$, після чого, воно набуде вигляду

$$c_i^2 \operatorname{div} \left(\sin^2 \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\sin^2 \theta_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \omega_{Hi} \right) \right) = 0.$$

В результаті з урахуванням першого рівняння отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} c_i^2 \Delta \theta_i - \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - \left(c_i^2 \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \omega_{Hi} \right)^2 - \omega_{0i}^2 \right) \sin \theta_i \cos \theta_i = 0, \\ c_i^2 \operatorname{div} \left(\sin^2 \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\sin^2 \theta_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \omega_{Hi} \right) \right) = 0, \end{cases}$$

далі враховуючи знак виразу

$$(\omega_{0i})^2 = \frac{(c_i)^2}{\alpha_i} \left(\frac{(d_i)^2}{\delta_i} + \beta_{ii} \right)$$

та перепозначення $\omega_{Hi} \rightarrow -\omega_{Hi}$, переписуємо її у еквівалентному вигляді

$$\begin{cases} c_i^2 \Delta \theta_i - \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - \left(c_i^2 \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \omega_{Hi} \right)^2 - \right. \\ \left. - \omega_{0i}^2 \operatorname{sgn} \left(\frac{d_i^2}{\delta_i} + \beta_{ii} \right) \right) \sin \theta_i \cos \theta_i = 0, \\ c_i^2 \operatorname{div} \left(\sin^2 \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\sin^2 \theta_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \omega_{Hi} \right) \right) = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

де

$$\vec{d}_i = d_i \vec{e}_z, \quad \omega_{Hi} = -|\gamma| H_{0i} = -(|\gamma_i| M_{0i} h_{0i}) / 2, \quad c_i = \left(\frac{|\gamma_i| M_{0i}}{2} \right) \sqrt{\alpha_i \delta_i},$$

$$(\omega_{0i})^2 = \frac{c_i^2}{\alpha_i} \left(\frac{d_i^2}{\delta_i} + \beta_{ii} \right) = \frac{(\gamma_i)^2 (M_{0i})^2 \delta_i}{4} \left(\frac{d_i^2}{\delta_i} + \beta_{ii} \right).$$

Порівняємо отриману систему рівнянь з використаною раніше (див. [7])

$$\begin{cases} c_i^2 \Delta \theta_i - \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - \left(c_i^2 \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \omega_{Hi} \right)^2 - \right. \\ \left. - \omega_{0i}^2 \operatorname{sgn} \left(\frac{d_i^2}{\delta_i} + \beta_{ii} \right) \right) \sin \theta_i \cos \theta_i = 0, \\ c_i^2 \operatorname{div} \left(\sin^2 \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\sin^2 \theta_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \omega_{Hi} \right) \right) + \frac{\partial \omega_H}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

де $\omega_{Hi} = |\gamma| H_{0i} = (|\gamma| M_{0i} h_{0i}) / 2$, $c_i = (4\mu_0 M_{0i} / \hbar) \sqrt{\alpha_i \delta_i}$ — характерний параметр АФМ, що має розмірність швидкості (т. з. «магنونна групова швидкість» — максимальна групова швидкість спінової хвилі, див., наприклад, [11, 71]), величина

$$\omega_{0i} = \frac{4\mu_0 M_{0i}}{\hbar} \sqrt{\left| \beta_{ii} + \frac{d_i^2}{\delta_i} \right| \delta_i},$$

$\hbar$ — приведена константа Планка.

Таким чином, отримане рівняння відрізняється від виведеного і використаного в [7] для випадку постійного магнітного поля доданком $\frac{\partial \omega_H}{\partial t}$ у другому рівнянні системи.

Домножимо знайдену вище x -компоненту рівняння на $\cos \varphi_i$, а y -компоненту на $\sin \varphi_i$, далі, проведемо додавання таким чином перетворених рівнянь, одержуємо:

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_i \left(-\sin \varphi_i \Delta \theta_i - 2 \cos^2 \theta_i \cos \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i + \sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \right. \right. \\ & - \sin \theta_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \Delta \varphi_i) - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \left(-\sin \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - 2 \cos^2 \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \right. \\ & \quad \left. + \sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 - \sin \theta_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) + \\ & + h_{0i} \cos \theta_i \left(\frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\cos \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} - \sin \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right) - \frac{1}{\delta_i} h_{0i} \sin \theta_i \sin \varphi_i \right) - \\ & \quad \left. - \frac{1}{\delta_i} \sin \theta_i \cos \theta_i \sin \varphi_i d_i^2 - \beta_{ii} \sin \theta_i \cos \theta_i \sin \varphi_i \right) \cos \varphi_i + \\ & + \left(\alpha_i \left(\cos \varphi_i \Delta \theta_i - 2 \cos^2 \theta_i \sin \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \sin \theta_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \Delta \varphi_i) - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \left(\cos \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - 2 \cos^2 \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \right. \\
& \quad \left. - \sin \theta_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 - \sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) + \\
& \quad + h_{0i} \cos \theta_i \left(\frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\cos \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + \sin \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right) + \right. \\
& \quad \quad \left. + \frac{1}{\delta_i} h_{0i} \sin \theta_i \cos \varphi_i \right) + \\
& \quad + \frac{1}{\delta_i} \sin \theta_i \cos \theta_i \cos \varphi_i d_i^2 + \beta_{ii} \sin \theta_i \cos \theta_i \cos \varphi_i \Big) \sin \varphi_i = 0, \\
& \quad \alpha_i \left(-2 \cos^2 \theta_i \cos^2 \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \sin \theta_i \cos^2 \varphi_i \Delta \varphi_i \right) - \\
& \quad - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \left(-2 \cos^2 \theta_i \cos^2 \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \sin \theta_i \cos^2 \varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) + \\
& \quad + h_{0i} \cos \theta_i \frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \cos \theta_i \cos^2 \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + \\
& \quad + \alpha_i \left(-2 \cos^2 \theta_i \sin^2 \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \sin \theta_i \cos \theta_i \sin^2 \varphi_i \Delta \varphi_i \right) - \\
& \quad - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \left(-2 \cos^2 \theta_i \sin^2 \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \sin \theta_i \cos \theta_i \sin^2 \varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) + \\
& \quad + h_{0i} \cos \theta_i \frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \cos \theta_i \sin^2 \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = 0,
\end{aligned}$$

нарешті, остаточно одержуємо рівняння

$$\begin{aligned}
& \alpha_i \left(-2 \cos^2 \theta_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \sin \theta_i \cos \theta_i \Delta \varphi_i \right) - \\
& - \frac{4}{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i} \left(-2 \cos^2 \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \sin \theta_i \cos \theta_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) + \\
& + h_{0i} \cos \theta_i \frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \cos \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = 0.
\end{aligned}$$

Позначимо $\omega_{Hi} := |\gamma| H_{0i} = (|\gamma| M_{0i} h_{0i}) / 2$, $c_i := |\gamma| M_{0i} \sqrt{\alpha_i \delta_i} / 2$, тоді

$$h_{0i} = \frac{2\omega_{Hi}}{|\gamma| M_{0i}}, \quad \omega_{0i}^2 = \frac{(c_i)^2}{\alpha_i} \left(\frac{(d_i)^2}{\delta_i} + \beta_{ii} \right) = \frac{\gamma^2 M_{0i}^2 \delta_i}{4} \left(\frac{(d_i)^2}{\delta_i} + \beta_{ii} \right).$$

З урахуванням цих заміन здійснюємо послідовні рівносильні перетворення останнього рівняння

$$-2\alpha_i \cos^2 \theta_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \alpha_i \sin \theta_i \cos \theta_i \Delta \varphi_i -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha_i}{(c_i)^2} \left(-2 \cos^2 \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \sin \theta_i \cos \theta_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) + \frac{2\omega_{Hi}}{|\gamma| M_{0i} \gamma M_{0i} \delta_i} \cos \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = 0, \\
& -2\alpha_i \cos^2 \theta_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \alpha_i \sin \theta_i \sin \theta_i \Delta \varphi_i - \\
& -\frac{\alpha_i}{(c_i)^2} \left(-2 \cos^2 \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \sin \theta_i \cos \theta_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) + 2\omega_{Hi} \frac{\alpha_i}{(c_i)^2} \cos \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = 0, \\
& -2(c_i)^2 \cos^2 \theta_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - (c_i)^2 \sin \theta_i \sin \theta_i \Delta \varphi_i - \\
& - \left(-2 \cos^2 \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \sin \theta_i \cos \theta_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) + 2\omega_{Hi} \cos \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = 0, \\
& -2(c_i)^2 \cos^2 \theta_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - (c_i)^2 \sin \theta_i \cos \theta_i \Delta \varphi_i + 2 \cos^2 \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \\
& + \sin \theta_i \cos \theta_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} + 2\omega_{Hi} \cos \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = 0, \\
& 2 \cos^2 \theta_i \left(-(c_i)^2 \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i + \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right) + \\
& + \sin \theta_i \cos \theta_i \left(-(c_i)^2 \Delta \varphi_i + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) + 2\omega_{Hi} \cos \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = 0.
\end{aligned}$$

Таким чином, повна система рівнянь набуває вигляду

$$\left\{ \begin{aligned} & (c_i)^2 \Delta \theta_i - \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - \\ & - \left((c_i)^2 \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \omega_{Hi} \right)^2 - |\omega_{0i}^2| \operatorname{sgn} \left(\frac{d_i^2}{\delta_i} + \beta_{ii} \right) \right) \sin \theta_i \cos \theta_i = 0, \\ & (c_i)^2 \operatorname{div} \left(\sin^2 \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\sin^2 \theta_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \omega_{Hi} \right) \right) = 0, \\ & 2 \cos^2 \theta_i \left(-(c_i)^2 \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i + \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right) + \sin \theta_i \cos \theta_i \left(-(c_i)^2 \Delta \varphi_i + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) + \\ & + 2\omega_{Hi} \cos \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = 0. \end{aligned} \right.$$

Розв'язком системи (2.12) за умови $\beta_{ii} + d_i^2/\delta_i < 0$, $v_i < c$, або за умови $\beta_{ii} + d_i^2/\delta_i > 0$, $v_i > c$ (v_i — швидкість спінової хвилі) є, зокрема, пари (θ_i, φ_i) , які задовольняють наступні співвідношення (див. [7, 10, 11]):

$$\begin{aligned}
\cos \theta_i &= \operatorname{sn} \left(\frac{Z_i + n_i \ln \frac{|\vec{r}_i|}{R_{1i}} + C_{2i}}{k_{2i}}, k_{2i} \right), \\
\varphi_i &= n_i \alpha_i + \alpha_{0i},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

де

$$\vec{r}_i = \frac{1}{l_{0i}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad Z_i = \frac{z - v_i t}{l_{0i} \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c_i^2}}} \text{ при } v_i < c_i, \quad Z_i = \frac{z - v_i t}{l_{0i} \sqrt{\frac{v_i^2}{c_i^2} - 1}} \text{ при } v_i > c_i,$$

n_i — довільне ціле число, α_{0i} та C_{2i} — довільні (дійсні) сталі, R_{1i} — довільна константа, що має сенс характерного масштабу задачі (в одиницях l_{0i}), $k_{2i} = 1/\sqrt{1+4C_i}$ ($C_i > 0$ — довільна додатна константа) — модуль еліптичної функції Якобі, $l_{0i} = \frac{c_i}{\omega_{0i}} = \sqrt{\alpha_i \left(\left| \beta_{ii} + \frac{d_i^2}{\delta_i} \right| \right)^{-1}}$ — характерні довжини. Константи R_{1i} та C_{2i} , очевидно, можуть бути об'єднані, так що

$$\cos \theta_i = \operatorname{sn} \left(\frac{Z_i + n_i \ln \left(\frac{|\vec{r}_i|}{R_{1i}} \right) + n_i \ln \left(\exp \left(\frac{C_{2i}}{n} \right) \right)}{k_{2i}}, k_{2i} \right),$$

тому

$$\cos \theta_i = \operatorname{sn} \left(\frac{Z_i + n_i \ln \frac{|\vec{r}_i|}{R_i}}{k_{2i}}, k_{2i} \right), \quad R_i = \frac{R_{1i}}{\exp \left(\frac{C_{2i}}{n_i} \right)}. \quad (2.14)$$

Для знаходження усіх розв'язків системи (2.12) у загальному випадку введемо циліндричну систему координат (r, θ, z) , вісь Oz якої, як і для використаної раніше декартової системи, спрямована уздовж спільної осі магнітної анізотропії двох АФМ.

Відома система рівнянь (див., наприклад, [24]) для спінових хвиль в одноосьовому феромагнетикі з параметрами α_1 (неоднорідна обмінна константа), δ (константа енергії однорідного обміну) та β_1 (константа анізотропії):

$$\begin{cases} c^2 \Delta \theta_L - \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial t^2} - \\ - \left(\left(|\gamma| H_0 - \frac{\partial \varphi_L}{\partial t} \right)^2 - c^2 \left(\vec{\nabla} \varphi_L \right)^2 - \omega_0^2 \operatorname{sgn} \beta_1 \right) \sin \theta_L \cos \theta_L = 0, \\ c^2 \operatorname{div} \left(\sin^2 \theta_L \vec{\nabla} \varphi_L \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sin^2 \theta_L \left(|\gamma| H_0 + \frac{\partial \varphi_L}{\partial t} \right) \right), \end{cases} \quad (2.15)$$

де $c = (4\mu_0 M_0 / \hbar) \sqrt{\alpha_1 \delta}$, $\omega_0 = (4\mu_0 M_0 / \hbar) \sqrt{|\beta_1| \delta}$, в аналогічній моделі з позначеннями

$$\begin{cases} l_x = \sin \theta_L \cos \varphi_L, \\ l_y = \sin \theta_L \sin \varphi_L, \\ l_z = \cos \theta_L \end{cases}$$

при $\frac{\partial \omega_H}{\partial t} = 0$, відрізняється від (2.12) тільки заміною $\beta_1 \rightarrow \beta_{ii} + \frac{d_i^2}{\delta_i}$, що враховує взаємодію Дзялошинського–Морії, а також відповідними індексами $i = 1, 2$, для кожного АФМ.

Ця система розв'язується аналогічно до того, як це було зроблено у [26]. Тому, здійснюючи перехід від одного АФМ до досліджуваної системи з двома АФМ, замінюючи $\beta_1 \rightarrow \beta_{ii} + d_i^2/\delta_i$, додаючи необхідні нижні індекси i , та обираючи знак плюс, розв'язок системи (2.12) (див., [26] та додаток С для випадку однієї особливої точки та $C > 0$) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \cos \theta_i = \operatorname{sn} \left(\frac{Z_i + n_i \ln(|\vec{r}_i|) + C_{2i}}{k_{2i}}, k_{2i} \right), \\ \varphi_i = \omega_{H_i} t + n_i \alpha_i + C_{3i}, \end{cases} \quad (2.16)$$

де одночасно $\beta_{ii} + d_i^2/\delta_i < 0$, $v_i < c_i$ або $\beta_{ii} + d_i^2/\delta_i > 0$, $v_i > c_i$.

Зокрема, за відсутності зовнішнього магнітного поля $H_{0i} = 0$ при $n_i = 1$, $C_{3i} = \pi/2$ (для обох АФМ), після перепозначення $R_i = \exp\{-C_{2i}\}$ зазначений розв'язок набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} \cos \theta_i = \operatorname{sn} \left(\frac{Z_i + \ln \frac{|\vec{r}_i|}{R_i}}{k_{2i}}, k_{2i} \right), \\ \varphi_i = \alpha_i + \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

Зауважимо, що стала k_1 у наведений вище розв'язок не входить, тому для зручності запису перепозначимо $k_{2i} \rightarrow k_i$.

Отже, нас цікавить розв'язок системи (2.11) (збігається з розв'язок системи (2.12) за випадку відсутності зовнішнього магнітного поля), вигляду

$$\begin{cases} \cos \theta_i = \operatorname{sn} \left(\frac{Z_i + \ln \frac{|\vec{r}_i|}{R_i}}{k_i}, k_i \right), \\ \varphi_i = \alpha_i + \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (2.17)$$

де $k_i > 0$.

2.3 Спектр нелінійних спінових хвиль в антиферромагнітному магнетному кристалі

2.3.1 Гранична умова відносно вектора антиферромагнетизму для розв'язку (2.17) системи Ландау–Ліфшиця

Для подальшого опису поширення спінових хвиль у досліджуваній системі застосуємо циліндричну систему координат (ρ, α, z) з формулами пе-

переходу до декартових

$$\begin{cases} x = \rho \cos \alpha, \\ y = \rho \sin \alpha, \\ z = z, \end{cases}$$

так що відповідні координатні орти матимуть вигляд,

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \vec{e}_x \cos \alpha + \vec{e}_y \sin \alpha, \\ \vec{e}_\alpha = -\vec{e}_x \sin \alpha + \vec{e}_y \cos \alpha \end{cases} \quad (2.18)$$

при цьому, очевидно, має місце малюнок

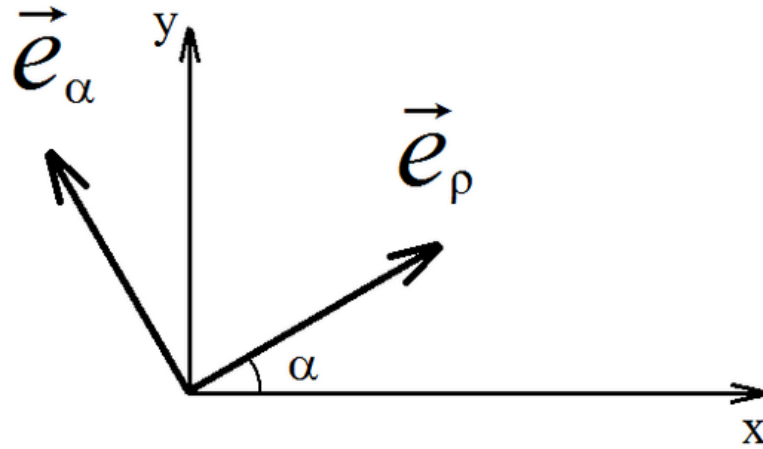


Рис. 2.3:

Дослідимо першу з граничних умов (2.3) у зазначеній циліндричній системі координат, яка є єдиною граничною умовою для випадку довгохвильове наближення (див. умови одержання граничних рівностей (1.34)).

Векторний добуток $[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2]$ у декартовій системі координат має вигляд

$$[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2] = \begin{pmatrix} l_{1y} l_{2z} - l_{2y} l_{1z} \\ l_{1z} l_{2x} - l_{2z} l_{1x} \\ l_{1x} l_{2y} - l_{2x} l_{1y} \end{pmatrix}$$

або, після переходу до азимутального та полярного кутів безрозмірного вектору антиферромагнетизму згідно (2.4), маємо

$$[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2] = \begin{pmatrix} \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 - \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_2 \sin \varphi_2 - \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

У введених вище циліндричних координатах (ρ, α, z) в силу (2.18) маємо

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \right]_{\rho} = (\sin \theta_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2) \cos \alpha + \\ + (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 - \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_2) \sin \alpha, \\ \left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \right]_{\alpha} = -(\sin \theta_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2) \sin \alpha + \\ + (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 - \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_2) \cos \alpha, \\ \left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \right]_z = \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_2 \sin \varphi_2 - \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Оскільки для розв'язку (2.17) виконуються рівності

$$\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 = -\sin \alpha, \quad \sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 = \cos \alpha,$$

то вирази для компонент векторного добутку (2.19) спрощуються наступним чином:

$$\begin{aligned} \left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \right]_{\rho} &= (\sin \theta_1 \cos \alpha \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \alpha) \cos \alpha + \\ &+ (-\cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \alpha + \sin \theta_1 \sin \alpha \cos \theta_2) \sin \alpha = \\ &= (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2) \cos^2 \alpha + \\ &+ (-\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) \sin^2 \alpha = -\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ \left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \right]_{\alpha} &= -(\sin \theta_1 \cos \alpha \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \alpha) \sin \alpha + \\ &+ (-\cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \alpha + \sin \theta_1 \sin \alpha \cos \theta_2) \cos \alpha = \\ &= -(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2) \sin \alpha \cos \alpha + \\ &+ (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2) \sin \alpha \cos \alpha \equiv 0, \\ \left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \right]_z &= -\sin \theta_1 \sin \alpha \sin \theta_2 \cos \alpha + \sin \theta_1 \cos \alpha \sin \theta_2 \sin \alpha \equiv 0. \end{aligned}$$

Таким чином, умова $\left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \right] \Big|_{z=NL} = 0$ для розв'язку вигляду (2.17) зводиться до співвідношення

$$(\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2) \Big|_{z=NL} = 0,$$

тобто

$$\left(-\operatorname{sn} \left(\frac{Z_1 + \ln \frac{|\vec{r}_1|}{R_1}}{k_1}, k_1 \right) \operatorname{cn} \left(\frac{Z_2 + \ln \frac{|\vec{r}_2|}{R_2}}{k_2}, k_2 \right) + \right.$$

$$+ \operatorname{cn} \left(\frac{Z_1 + \ln \frac{|\vec{r}_1|}{R_1}}{k_1}, k_1 \right) \operatorname{sn} \left(\frac{Z_2 + \ln \frac{|\vec{r}_2|}{R_2}}{k_2}, k_2 \right) \Big|_{z=NL} = 0. \quad (2.20)$$

При виведенні рівності (2.20), враховано той факт, що з рівностей

$$\begin{aligned} \cos \theta_i &= \operatorname{sn} \left(\frac{Z_i + \ln \frac{|\vec{r}_i|}{R_i}}{k_i}, k_i \right) = \sin \left(\operatorname{am} \left(\frac{Z_i + \ln \frac{|\vec{r}_i|}{R_i}}{k_i}, k_i \right) \right) = \\ &= \cos \left(\operatorname{am} \left(\frac{Z_i + \ln \frac{|\vec{r}_i|}{R_i}}{k_i}, k_i \right) - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

випливає

$$\sin \theta_i = -\operatorname{cn} \left(\frac{Z_i + \ln \frac{|\vec{r}_i|}{R_i}}{k_i}, k_i \right).$$

2.3.2 Випадок докритичного поширення хвилі намагніченості в обох АФМ

Зупинимось на випадку докритичного поширення хвилі намагніченості в обох антиферромагнетиках, тобто випадку розв'язку (2.17) при

$$\beta_{ii} + d_i^2/\delta_i < 0, \quad v_i < c_i, \quad Z_i = \frac{z - v_i t}{l_{0i} \sqrt{1 - (v_i^2/c_i^2)}}. \quad (2.21)$$

Тоді рівність (2.20) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & -\operatorname{sn} \left(\frac{NL - v_1 t}{l_{01} k_1 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}} + \frac{1}{k_1} \ln \frac{\rho}{l_{01} R_1}, k_1 \right) \operatorname{cn} \left(\frac{NL - v_2 t}{l_{02} k_2 \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c_2^2}}} + \frac{1}{k_2} \ln \frac{\rho}{l_{02} R_2}, k_2 \right) + \\ & + \operatorname{cn} \left(\frac{NL - v_1 t}{l_{01} k_1 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}} + \frac{1}{k_1} \ln \frac{\rho}{l_{01} R_1}, k_1 \right) \times \\ & \times \operatorname{sn} \left(\frac{NL - v_2 t}{l_{02} k_2 \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c_2^2}}} + \frac{1}{k_2} \ln \frac{\rho}{l_{02} R_2}, k_2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Оскільки ця рівність виконується при будь-яких значеннях ρ , t , то з неї випливають, зокрема, співвідношення $k_1 = k_2 = k$,

$$\frac{v_1}{l_{01} k_1 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}} = \frac{v_2}{l_{02} k_2 \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c_2^2}}},$$

або з урахуванням $k_1 = k_2 = k$:

$$\frac{v_1}{l_{01}\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c_1^2}}} = \frac{v_2}{l_{02}\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c_2^2}}}.$$

При виконанні зазначених умов, рівність (2.22) справджується за випадку рівності аргументів відповідних функцій з точністю до їх періоду, тобто

$$\frac{NL}{l_{01}k\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c_1^2}}} - \frac{1}{k} \ln \frac{\rho}{l_{01}R_1} = \frac{NL}{l_{02}k\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c_2^2}}} - \frac{1}{k} \ln \frac{\rho}{l_{02}R_2} + 4K(k) M,$$

де $K(k)$ — повний еліптичний інтеграл 1-го роду

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}},$$

M — довільне ціле число, $l_{01}R_1$ та $l_{02}R_2$ при обезрозмірюванні мають бути віднормовані на однакове реперне значення, тобто останній вираз, строго кажучи, має вигляд

$$\frac{NL}{l_{01}k\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c_1^2}}} - \frac{1}{k} \ln \frac{l_{01}R_1}{l_{02}R_2} = \frac{NL}{l_{02}k\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c_2^2}}} + 4K(k) M.$$

Оскільки останнє співвідношення виконується в тому числі при $N = M = 0$, з нього випливає, зокрема, $\ln \frac{l_{01}R_1}{l_{02}R_2} = 0$, тобто $l_{01}R_1 = l_{02}R_2$. Таким чином, гранична умова $\left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2\right]_{z=NL} = 0$ зводиться до наступної сукупності умов:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = k_2 = k, \\ \frac{v_1}{l_{01}\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c_1^2}}} = \frac{v_2}{l_{02}\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c_2^2}}}, \\ l_{01}R_1 = l_{02}R_2, \\ NL \left(\frac{1}{l_{01}\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c_1^2}}} - \frac{1}{l_{02}\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c_2^2}}} \right) = 4k K(k) M. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Розглянемо тепер другу та третю умову (2.3), тобто, $\left[\vec{l}_i \times \frac{\vec{l}_i}{\partial z}\right]_{z=NL} = 0$, $i = 1, 2$. Аналогічно до попередньої умови використаємо циліндричну систему координат (ρ, α, z) . З урахуванням (2.4) одержуємо рівності

$$\frac{\partial l_{ix}}{\partial z} = \cos \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial z}, \quad \frac{\partial l_{iy}}{\partial z} = \cos \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial z}, \quad \frac{\partial l_{iz}}{\partial z} = -\sin \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial z}$$

(при обрахунку даних виразів використано той факт, що для розв'язку вигляду (2.17) виконується умова $\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = 0$), тому рівність

$$\left[\vec{l}_i \times \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial z} \right] = \begin{pmatrix} l_{iy} \frac{\partial l_{iz}}{\partial z} - l_{iz} \frac{\partial l_{iy}}{\partial z} \\ l_{iz} \frac{\partial l_{ix}}{\partial z} - l_{ix} \frac{\partial l_{iz}}{\partial z} \\ l_{ix} \frac{\partial l_{iy}}{\partial z} - l_{iy} \frac{\partial l_{ix}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

у введених вище циліндричних координатах перепишеться у покомпонентному вигляді як такі три рівняння

$$\left[\vec{l}_i \times \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial z} \right]_{\rho} = \sin(\alpha - \varphi_i) \frac{\partial \theta_i}{\partial z},$$

$$\left[\vec{l}_i \times \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial z} \right]_{\alpha} = \cos(\alpha - \varphi_i) \frac{\partial \theta_i}{\partial z}, \quad \left[\vec{l}_i \times \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial z} \right]_z = 0.$$

Таким чином, з умов

$$\left[\vec{l}_i \times \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial z} \right] \Big|_{z=NL} = 0, \quad i = 1, 2,$$

випливають рівності

$$\left[\vec{l}_i \times \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial z} \right]_{\rho} = \sin(\alpha - \varphi_i) \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \equiv 0, \quad \left[\vec{l}_i \times \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial z} \right]_{\alpha} = \cos(\alpha - \varphi_i) \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \equiv 0,$$

з яких, враховуючи, що $\sin(\alpha - \varphi_i)$ і $\cos(\alpha - \varphi_i)$ не можуть одночасно дорівнювати нулю, як наслідок одержуємо

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial z} \Big|_{z=NL} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Граничні рівності для розв'язку вигляду (2.17) рівносильні співвідношенням

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{am} \left(\frac{Z_i + \ln \frac{|\vec{r}_i|}{R_i}}{k_i}, k_i \right) \right) \Big|_{z=NL} = 0, \quad i = 1, 2.$$

З властивостей еліптичної функції Якобі $\operatorname{am}(A, k_i)$ Якобі приходимо до висновку, що дане співвідношення виконуватись не може. Справді, при $C > 0$ з урахуванням $k_i = \frac{1}{\sqrt{1+4C}} \in (0, 1)$ одержуємо, що залежність $\operatorname{am}(A, k_i)$ від

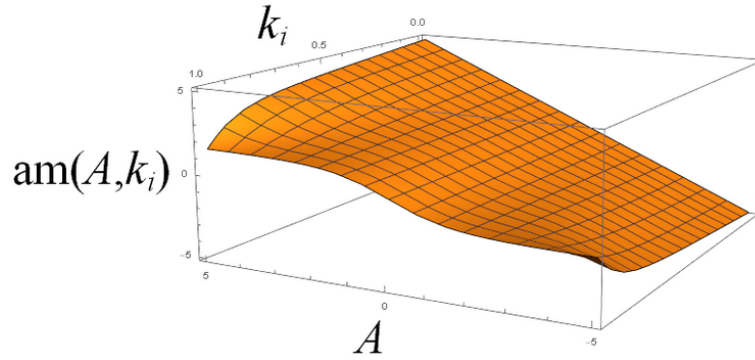


Рис. 2.4: Графік еліптичної функції Якобі $\text{am}(A, k_i)$, $0 \leq k_i \leq 1$, $-5 \leq A \leq 5$

першого аргументу A є монотонною для всіх $k_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2$. Таким чином, випадок, що відповідає системі умов (2.3), реалізуватись не може.

Розглянемо випадок $a_{lm} = a_{ml} = 0$ — або, строго кажучи, —

$$a_{lm} \approx a_{ml} \ll \min(a_{ll} M_{01}/M_{02}, a_{ll} M_{02}/M_{01}),$$

так що можна вважати, що перші дві умови (2.1) виконуються (величини $a_{ml} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] \Big|_{z=NL} = 0$ та $a_{lm} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] \Big|_{z=NL} = 0$, оскільки є нехтовно малими порівняно з іншими величинами, що входять у (2.1) та містять векторний добуток $\left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right]$, а саме:

$$\left((M_{02}/M_{01}) a_{ll} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] \Big|_{z=NL} \text{ та } (M_{01}/M_{02}) a_{ll} \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] \Big|_{z=NL} \right).$$

Оскільки, як було показано вище, для розв'язку вигляду (2.17) в циліндричній системі координат (ρ, α, z) виконуються рівності

$$\begin{aligned} \left[\vec{l}_i \times \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial \theta_i}{\partial z} \vec{e}_\rho, \quad \left[\vec{l}_2 \times \vec{l}_1 \right] = (-\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) \vec{e}_\rho = \\ &= -\sin(\theta_2 - \theta_1) \vec{e}_\rho, \end{aligned}$$

то третя та четверта умови системи (2.1) перепишуться у вигляді

$$\begin{cases} \left(\frac{M_{02}}{M_{01}} a_{ll} \sin(\theta_2 - \theta_1) - 4\alpha_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=NL} = 0, \\ \left(\frac{M_{01}}{M_{02}} a_{ll} \sin(\theta_2 - \theta_1) - 4\alpha_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=NL} = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Ці умови не можуть бути задовольнятися для нелінійної спінової хвилі.

Загальні граничні умови для сігма моделі можуть мати один з трьох наступних виглядів

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{M_{01}}{M_{02}} a_{ll} \sin(\theta_2 - \theta_1) - 4\alpha_1 \left(\frac{M_{01}}{M_{02}} \right)^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=NL} = 0, \\ \left(\frac{M_{01}}{M_{02}} a_{ll} \sin(\theta_2 - \theta_1) - 4\alpha_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=NL} = 0, \\ \left(\frac{M_{01}}{M_{02}} a_{ll} \sin(\theta_2 - \theta_1) - 4\alpha_1 \left(\frac{M_{01}}{M_{02}} \right)^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=NL} = 0, \\ \left(\left(\frac{M_{01}}{M_{02}} \right)^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \alpha_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=NL} = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \sin(\theta_2 - \theta_1) \Big|_{z=NL} = 4 \frac{\alpha_1 M_{01}}{a_{ll} M_{02}} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=NL}, \\ \left(\left(\frac{M_{01}}{M_{02}} \right)^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \alpha_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=NL} = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Звідси робимо висновок, що для розв'язку вигляду (2.16) може бути реалізований лише останній варіант — коли для досліджуваної спінової хвилі виконується довгохвильове наближення: довжина спінової хвилі λ_{SW} , яка збуджується у досліджуваній системі, набагато перевищує обидва параметри пари антиферромагнетиків

$$\frac{\alpha_1}{a_{ll}} = \frac{\alpha_1}{A_{11} - A_{12} - A_{21} + A_{22}}, \quad \frac{\alpha_2}{a_{ll}} = \frac{\alpha_2}{A_{11} - A_{12} - A_{21} + A_{22}},$$

що мають розмірність довжини — точніше, обидві величини α_i/λ_{SW} мають бути набагато меншими за $\min\{a_{ll} M_{01}/M_{02}, a_{ll} M_{02}/M_{01}\}$ (для типових значень $\alpha_{1,2} \sim 10^{-12}$ см⁻², $\lambda_{SW} \sim 10^{-6}$ см при $M_{01} \sim M_{02}$ звідси випливає, що $a_{ll} \gg 10^{-6}$ см, що відповідає характерним значенням цього параметру для типових пар антиферромагнетиків). В такому випадку, як було зазначено вище, можна застосовувати умову (1.34), яка для досліджуваного магнетонного кристалу набуває вигляду

$$\left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \right] \Big|_{z=NL} = 0. \quad (2.25)$$

Як було зазначено вище, для досліджуваного розв'язку умова (2.25) еквівалентна системі умов (2.23).

При цьому з умов періодичності хвилі уздовж осі Oz , періодичності еліптичних функцій Якобі та рівності $k_1 = k_2 = k$ випливають рівності

$$\lambda_{SW}^{(i)} = 4K(k) k l_{0i} \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c_i^2}}, \quad (2.26)$$

що при $M_{01} \sim M_{02}$ дозволяє переписати умову застосовності довгохвильового наближення у вигляді $\alpha_i/a_{ll} \ll \lambda_{SW}^{(i)}$, тобто

$$\frac{4kK(k) a_{ll} l_{0i}}{\alpha_i} \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c_i^2}} \gg 1. \quad (2.27)$$

Оскільки $K(k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow 1$, при будь-яких значеннях параметрів АФМ існує таке значення k (достатньо близьке до одиниці), починаючи з якого умова (2.27) виконується для обох АФМ — а отже, може бути застосоване використане в даному підрозділі довгохвильове наближення.

Дослідимо систему умов (2.23), що виконується для досліджуваного розв'язку у довгохвильовому наближенні. Після піднесення обох частин другого рівняння до квадрату та перетворень, одержуємо

$$v_2^2 = \frac{v_1^2 l_{02}^2}{v_1^2 \left(\frac{l_{02}^2}{c_2^2} - \frac{l_{01}^2}{c_1^2} \right) + l_{01}^2}. \quad (2.28)$$

Підставляючи отриманий вище вираз для в четверте рівняння системи (2.23) при $N = M$, отримуємо послідовні перетворення

$$L \left(\frac{1}{l_{01} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}} - \frac{1}{l_{02} \sqrt{1 - \frac{1}{c_2^2} \left(\frac{v_1^2 (l_{02})^2}{v_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} \right) + (l_{01})^2} \right)}} \right) = 4k K(k),$$

$$\left(\frac{1}{l_{01} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}} - \frac{\sqrt{v_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} \right) + (l_{01})^2}}{l_{02} \sqrt{v_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} \right) + (l_{01})^2 - \frac{v_1^2}{c_2^2} (l_{02})^2}} \right) = \frac{4k K(k)}{L},$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{l_{01} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}} - \frac{\sqrt{v_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} \right) + (l_{01})^2}}{l_{01} l_{02} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}} = \frac{4k K(k)}{L}, \\
& \frac{1}{l_{01} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}} \left(1 - \frac{\sqrt{v_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} \right) + (l_{01})^2}}{l_{02}} \right) = \frac{4k K(k)}{L}, \\
& l_{02} - \sqrt{v_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} \right) + (l_{01})^2} = \frac{4k K(k)}{L} l_{01} l_{02} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}, \\
& (l_{02})^2 + v_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} \right) + (l_{01})^2 - \\
& - 2l_{02} \sqrt{v_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} \right) + (l_{01})^2} = \\
& = \left(\frac{4k K(k)}{L} l_{01} l_{02} \right)^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{c_1^2} \right), \\
& (l_{02})^2 + v_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} \right) + (l_{01})^2 - \left(\frac{4k K(k)}{L} l_{01} l_{02} \right)^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{c_1^2} \right) = \\
& = 2l_{02} \sqrt{v_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} \right) + (l_{01})^2}, \\
& (l_{02})^2 + v_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \left(\frac{4k K(k)}{L} \frac{l_{01} l_{02}}{c_1} \right)^2 \right) + \\
& + (l_{01})^2 - \left(\frac{4k K(k)}{L} l_{01} l_{02} \right)^2 = 2l_{02} \sqrt{v_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} \right) + (l_{01})^2}.
\end{aligned}$$

Позначимо

$$k_* := (l_{02})^2/c_2^2 - (l_{01})^2/c_1^2, \quad A_0 := \frac{4k K(k)}{L} l_{01} l_{02}, \quad A_1^2 := (l_{01})^2 + (l_{02})^2 - A_0^2. \quad (2.29)$$

Тоді остання рівність перепишеться у вигляді

$$A_1^2 + v_1^2 \left(k_* + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right) = 2l_{02} \sqrt{v_1^2 k_* + (l_{01})^2},$$

підносимо далі її почленно до квадрату та перетворюємо, як наслідок, одержуємо

$$v_1^4 \left(k_* + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right)^2 + v_1^2 \left(2A_1^2 v_1^2 \left(k_* + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right) - 4(l_{02})^2 k_* \right) + (A_1^4 - 4(l_{02})^2 (l_{01})^2) = 0.$$

Отримане біквадратне (відносно v_1^2) рівняння має наступні розв'язки:

$$v_1^2 = \frac{- \left(2A_1^2 \left(k_* + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right) - 4(l_{02})^2 k_* \right)}{2 \left(k_* + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right)^2} \pm \frac{\sqrt{\left(2A_1^2 \left(k_* + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right) - 4(l_{02})^2 k_* \right)^2 - 4 \left(k_* + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right) (A_1^4 - 4(l_{02})^2 (l_{01})^2)}}{2 \left(k_* + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right)^2},$$

або, після спрощення та враховуючи означення k_* та A_1 , одержуємо

$$v_1^2 = \frac{- \left(A_1^2 \left(k_* + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right) - 2(l_{02})^2 k_* \right)}{\left(k_* + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right)^2} \pm \frac{\sqrt{\left(A_1^2 \left(k_* + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right) - 2(l_{02})^2 k_* \right)^2 - \left(k_* + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right) (A_1^4 - 4(l_{02})^2 (l_{01})^2)}}{\left(k_* + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right)^2},$$

$$\left(\frac{v_1}{c_1} \right)^2 =$$

$$= \frac{- \left(\left((l_{01})^2 + (l_{02})^2 - A_0^2 \right) \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right) - 2(l_{02})^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} \right) \right)}{c_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right)^2} \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{F_1}}{c_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right)^2}, \quad (2.30)$$

де

$$F_1 = \left(\left((l_{01})^2 + (l_{02})^2 - A_0^2 \right) \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right) - \right.$$

$$\left. - 2(l_{02})^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} \right) \right)^2 -$$

$$- \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right)^2 \left(\left((l_{01})^2 + (l_{02})^2 - A_0^2 \right)^2 - 4(l_{02})^2(l_{01})^2 \right).$$

Введемо у розгляд величини $c_{12} > 0$, $l_{12} > 0$, $L_{0i} > 0$, $i = 1, 2$, та функцію $f = f(k)$, які задовольняють співвідношення

$$(c_{12})^2 = \frac{(c_1)^2}{(c_2)^2}, (l_{12})^2 = \frac{(l_{01})^2}{(l_{02})^2}, (L_{0i})^2 = \frac{L^2}{(l_{0i})^2}, i = 1, 2; f = 4kK(k), \quad (2.31)$$

де k — довільне додатне число.

Тоді в силу рівностей (2.29), (2.31), послідовно одержуємо співвідношення

$$\begin{aligned} (A_0)^2 &= \frac{L^4}{(L_{01} L_{02})^2} f^2, \quad 4(l_{01})^2(l_{02})^2 = 4 \frac{L^4}{(L_{01})^2 (L_{02})^2}, \\ (l_{01})^2 + (l_{02})^2 - (A_0)^2 &= \frac{L^2}{(L_{01} L_{02})^2} \left((L_{01})^2 + (L_{02})^2 - L^2 f^2 \right), \\ \frac{(l_{02})^2}{(c_2)^2} - \frac{(l_{01})^2}{(c_1)^2} + \frac{(A_0)^2}{c_1^2} &= \frac{1}{(c_1)^2} \frac{L^2}{(L_{01} L_{02})^2} \left(L^2 f^2 - (L_{02})^2 + (L_{01})^2 (c_{12})^2 \right), \\ 2(l_{02})^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{(c_2)^2} - \frac{(l_{01})^2}{(c_1)^2} \right) &= 2 \frac{L^4}{(c_1)^2 (L_{01})^2 (L_{02})^4} \left((c_{12})^2 (L_{01})^2 - (L_{02})^2 \right), \end{aligned}$$

звідки, після елементарних перетворень, рівність (2.30) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \left((v_1/c_1)^2 \right)_\pm &\equiv \left(\frac{v_1}{c_1} \right)^2 = \\ &= \frac{f^4 + f^2 (L_{02})^2 \left(\frac{(c_{12})^2 - 1}{(l_{12})^2} - 2 \right) + (L_{01})^2 (L_{02})^2 \left((l_{12})^2 + \frac{(c_{12})^2}{(l_{12})^2} - 1 - (c_{12})^2 \right)}{\left(f^2 - (L_{02})^2 + (L_{01})^2 (c_{12})^2 \right)^2} \pm \\ &\pm \frac{2f (L_{01})^2 \sqrt{f^2 (c_{12})^2 + \left(1 - (c_{12})^2 \right) \left((L_{02})^2 - (L_{01})^2 (c_{12})^2 \right)}}{\left(f^2 - (L_{02})^2 + (L_{01})^2 (c_{12})^2 \right)^2}, \quad (2.32) \end{aligned}$$

де у лівій частині береться той знак (плюс або мінус), який стоїть у правій частині перед квадратним коренем.

Зважаючи на симетричність системи рівнянь (2.23) відносно заміни індексів $1 \leftrightarrow 2$ для АФМ та $K(k) \rightarrow -K(k)$, приходимо до висновку, що для $(v_2/c_2)^2$ має виконуватись рівність:

$$\left(\frac{v_2}{c_2} \right)^2 =$$

$$= \frac{-\left(\left((l_{01})^2 + (l_{02})^2 - A_0^2\right)\left(\frac{(l_{01})^2}{c_1^2} - \frac{(l_{02})^2}{c_2^2} + \frac{A_0^2}{c_2^2}\right) - 2(l_{01})^2\left(\frac{(l_{01})^2}{c_1^2} - \frac{(l_{02})^2}{c_2^2}\right)\right)}{(c_2)^2\left(\frac{(l_{01})^2}{c_1^2} - \frac{(l_{02})^2}{c_2^2} + \frac{A_0^2}{c_2^2}\right)^2} \pm \frac{\sqrt{F_2}}{(c_2)^2\left(\frac{(l_{01})^2}{c_1^2} - \frac{(l_{02})^2}{c_2^2} + \frac{A_0^2}{c_2^2}\right)^2},$$

де

$$F_2 = \left(\left((l_{01})^2 + (l_{02})^2 - A_0^2\right)\left(\frac{(l_{01})^2}{c_1^2} - \frac{(l_{02})^2}{c_2^2} + \frac{A_0^2}{c_2^2}\right) - 2(l_{01})^2\left(\frac{(l_{01})^2}{c_1^2} - \frac{(l_{02})^2}{c_2^2}\right)\right)^2 - \left(\frac{(l_{01})^2}{c_1^2} - \frac{(l_{02})^2}{c_2^2} + \frac{A_0^2}{c_2^2}\right)^2 \left(\left((l_{01})^2 + (l_{02})^2 - A_0^2\right)^2 - 4(l_{02})^2(l_{01})^2\right).$$

З останньої рівності доводимо, аналогічно виведенню формули (2.32), рівність

$$\begin{aligned} \left((v_2/c_2)^2\right)_\pm &\equiv \left(\frac{v_2}{c_2}\right)^2 = \\ &= \frac{f^4 + f^2(L_{01})^2\left((l_{12})^2\left((c_{12})^{-2} - 1\right) - 2\right)}{\left(f^2 - (L_{01})^2 + \frac{(L_{02})^2}{(c_{12})^2}\right)^2} + \\ &+ \frac{(L_{01})^2(L_{02})^2\left((l_{12})^{-2} + (l_{12})^2(c_{12})^{-2} - 1 - (c_{12})^{-2}\right)}{\left(f^2 - (L_{01})^2 + \frac{(L_{02})^2}{(c_{12})^2}\right)^2} \pm \\ &\pm \frac{2f(L_{02})^2\sqrt{f^2(c_{12})^{-2} + \left(1 - (c_{12})^{-2}\right)\left((L_{01})^2 - (L_{02})^2(c_{12})^{-2}\right)}}{\left(f^2 - (L_{01})^2 + \frac{(L_{02})^2}{(c_{12})^2}\right)^2}. \quad (2.33) \end{aligned}$$

У випадку довільних N , M (необов'язково $N = M$) знайдені вирази для швидкостей залишаються вірними при більш загальному виразі для величини A_0 (доведення аналогічне, як і при $M = N$), а саме — для A_0 , яка в загальному випадку дорівнює $A_0 = \frac{4kK(k)}{L} \frac{M}{N} l_{01}l_{02}$, при цьому f з (2.31) потрібно змінити на таке: $f = 4kK(k) \frac{M}{N}$.

Отже, рівності (2.32) та (2.33) справджуються для величин $c_{12} > 0$, $l_{12} > 0$, $L_{0i} > 0$, $i = 1, 2$, та функції $f = f(k)$, які задовольняють співвідношення (2.31) у випадку (2.21) (та у наступних випадках також).

Вирази (2.26) для довжин спінових хвиль для кожного АФМ відповідають наступним значенням періода T_{SW} та частоти ν_{SW} спінової хвилі:

$$\nu_{SW} = \frac{1}{T_{SW}} = \frac{v_1}{4k K(k)l_{01}} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}} = \frac{v_2}{4k K(k)l_{02}} \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c_2^2}}. \quad (2.34)$$

Розглянемо графічні ілюстрації до розглядуваного випадку (з використанням програмування на мові Python).

Випадок $v_1/c_1 < 1$, $v_2/c_2 < 1$
комбінація АФМ1/АФМ2: MnN/MnPt
(див. Додаток В)

$$l_{01} = 2.78, \quad l_{02} = 16.13, \quad l_{12} = 5.802158273381295, \quad c_{12} = 0.76$$

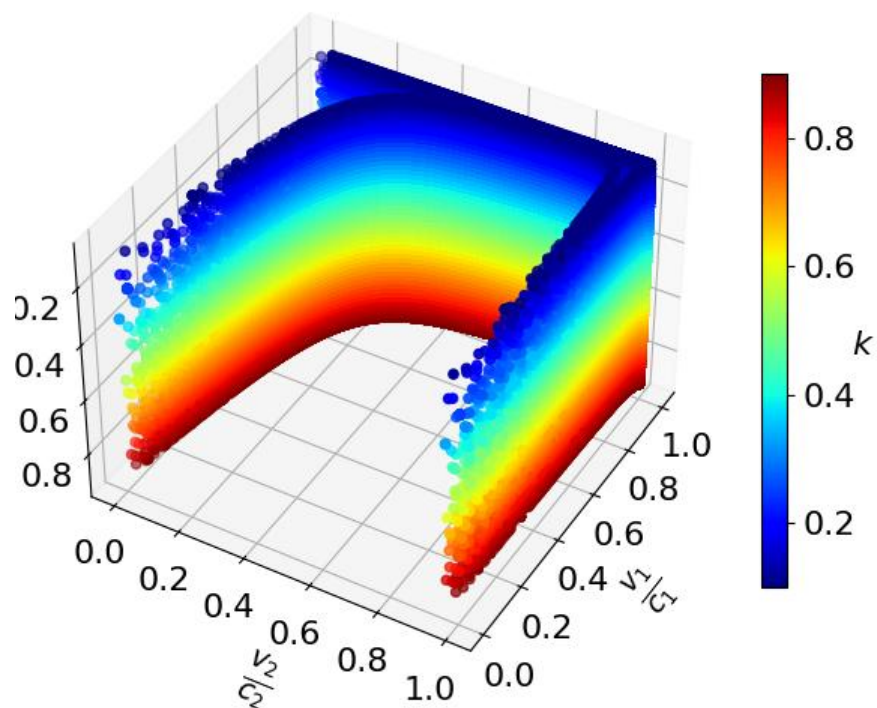


Рис. 2.5: Залежність v_i/c_i , $i = 1, 2$, від різних значень k для $M = 1, 2, \dots, 100$, $N = 1, 2, \dots, 500$, у випадку $v_i/c_i < 1$, $i = 1, 2$, АФМ1/ АФМ2 = MnN/MnPt ($l_{01} = 2.78$, $l_{02} = 16.13$, $c_{12} = 0.76$)

Малюнок (2.5) візуалізує зв'язок спінових швидкостей в обох АФМ і хвильового числа k у випадку (2.21).

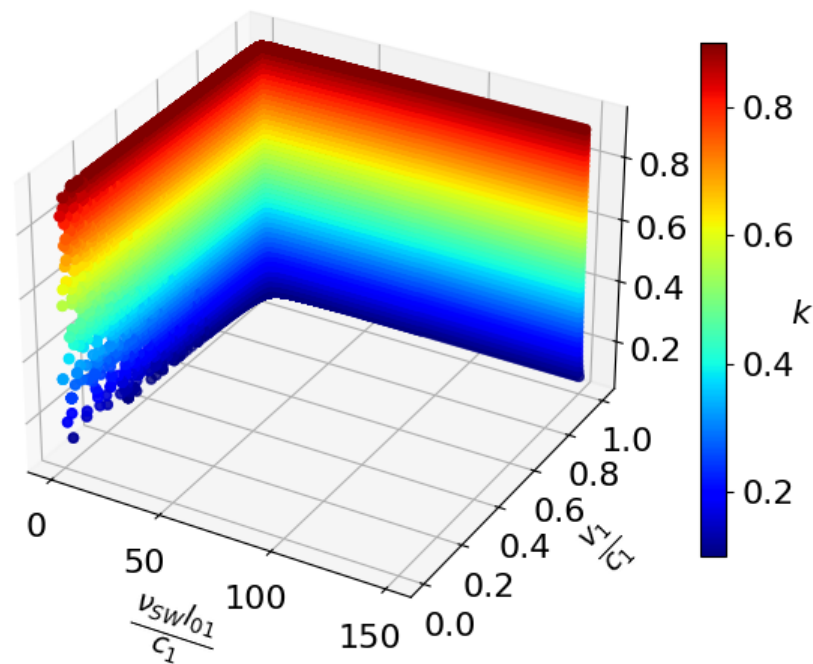


Рис. 2.6: Залежність v_1/c_1 та $(\nu_{sw} l_{01})/c_1$ від різних значень k для $M = 1, 2, \dots, 100$, $N = 1, 2, \dots, 500$, у випадку $v_i/c_i < 1, i = 1, 2$, АФМ1/ АФМ2 = MnN/MnPt ($l_{01} = 2.78$, $l_{02} = 16.13$, $c_{12} = 0.76$)

Малюнок 2.6 відображає вплив частоти спінових хвиль і характеристичної довжини l_{01} на швидкість в першому АФМ у випадку (2.21).

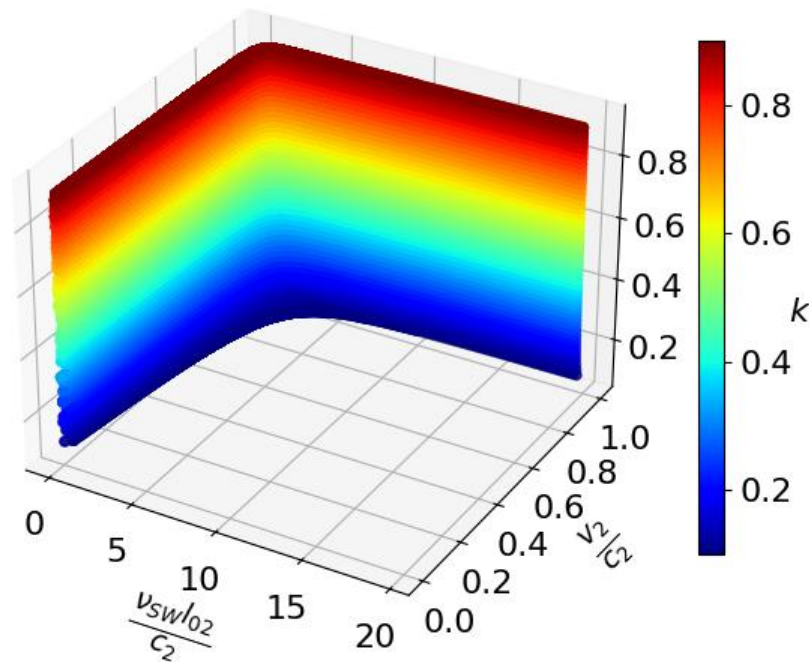


Рис. 2.7: Залежність v_2/c_2 та $(\nu_{sw} l_{02})/c_2$ від різних значень k для $M = 1, 2, \dots, 100$, $N = 1, 2, \dots, 500$, у випадку $v_i/c_i < 1, i = 1, 2$, АФМ1/ АФМ2 = MnN/MnPt ($l_{01} = 2.78$, $l_{02} = 16.13$, $c_{12} = 0.76$)

Малюнок 2.7 відображає вплив частоти спінових хвиль і характеристичної довжини l_{02} на швидкість в другому АФМ у випадку (2.21).

Розглянемо схематичну блок-схему програми на мові Python (додаток Е), за допомогою якої одержувались малюнки (2.5), (2.6) та (2.7).

Зауваження: коментар розміщується справа після знака #, усі елементи блок-схеми містяться у прямокутниках, інколи межі прямокутника не малюються для зручності, тоді даний елемент блок-схеми міститься між відповідними стрілками.

Початок



```
#Імпорт необхідних бібліотек
import matplotlib
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import special
```



Блок 1.

#Фізичні параметри середовища

$L_{01} = 2.78$

#Довжина хвилі у першому середовищі

$L_{02} = 16.13$

#Довжина хвилі у другому середовищі

$l_{12} = L_{02}/L_{01}$

#Відношення довжин хвиль між середовищами

$c_{12} = 0.76$

#Відношення швидкостей фазової хвилі між середовищами

#Діапазон значень хвильового числа k

$k_{min} = 0.1$

#Мінімальне значення k

$k_{max} = 0.9$

#Максимальне значення k



Блок 2. Допоміжні функції

Функції для обчислення дискримінантів $D_{1_2} = D_1$ та $D_{2_2} = D_2$

$D_{1_2} = (c_{12})^2 f^2 + (1 - (c_{12})^2) ((L_{02})^2 - (L_{01})^2 (c_{12})^2)$

$$D_{2_2} = c_{12}^{-2} f^2 + (1 - c_{12}^{-2}) (L_{01}^2 - L_{02}^2 c_{12}^{-2})$$

Функція для обрахунку $(v_1/c_1)^2$ за формулою (2.32) (знак «+»)

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_1}{c_1}\right)^2 = & \frac{f^4 + f^2 (L_{02})^2 \left(\frac{(c_{12})^2 - 1}{(l_{12})^2} - 2\right) + (L_{01})^2 (L_{02})^2 \left((l_{12})^2 + \frac{(c_{12})^2}{(l_{12})^2} - 1 - (c_{12})^2\right)}{\left(f^2 - (L_{02})^2 + (L_{01})^2 (c_{12})^2\right)^2} + \\ & + \frac{2f (L_{01})^2 \sqrt{f^2 (c_{12})^2 + \left(1 - (c_{12})^2\right) \left((L_{02})^2 - (L_{01})^2 (c_{12})^2\right)}}{\left(f^2 - (L_{02})^2 + (L_{01})^2 (c_{12})^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Функція для обрахунку $(v_1/c_1)^2$ за формулою (2.32) (знак «-»)

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_1}{c_1}\right)^2 = & \frac{f^4 + f^2 (L_{02})^2 \left(\frac{(c_{12})^2 - 1}{(l_{12})^2} - 2\right) + (L_{01})^2 (L_{02})^2 \left((l_{12})^2 + \frac{(c_{12})^2}{(l_{12})^2} - 1 - (c_{12})^2\right)}{\left(f^2 - (L_{02})^2 + (L_{01})^2 (c_{12})^2\right)^2} - \\ & - \frac{2f (L_{01})^2 \sqrt{f^2 (c_{12})^2 + \left(1 - (c_{12})^2\right) \left((L_{02})^2 - (L_{01})^2 (c_{12})^2\right)}}{\left(f^2 - (L_{02})^2 + (L_{01})^2 (c_{12})^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Функція для обрахунку $(v_2/c_2)^2$ за формулою (2.33) (знак «+»)

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_2}{c_2}\right)^2 = & \frac{f^4 + f^2 (L_{01})^2 \left((l_{12})^2 \left((c_{12})^{-2} - 1\right) - 2\right)}{\left(f^2 - (L_{01})^2 + \frac{(L_{02})^2}{(c_{12})^2}\right)^2} + \\ & + \frac{(L_{01})^2 (L_{02})^2 \left((l_{12})^{-2} + (l_{12})^2 (c_{12})^{-2} - 1 - (c_{12})^{-2}\right)}{\left(f^2 - (L_{01})^2 + \frac{(L_{02})^2}{(c_{12})^2}\right)^2} + \\ & + \frac{2f (L_{02})^2 \sqrt{f^2 (c_{12})^{-2} + \left(1 - (c_{12})^{-2}\right) \left((L_{01})^2 - (L_{02})^2 (c_{12})^{-2}\right)}}{\left(f^2 - (L_{01})^2 + \frac{(L_{02})^2}{(c_{12})^2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Функція для обрахунку $(v_2/c_2)^2$ за формулою (2.33) (знак «-»)

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_2}{c_2}\right)^2 = & \frac{f^4 + f^2 (L_{01})^2 \left((l_{12})^2 \left((c_{12})^{-2} - 1 \right) - 2 \right)}{\left(f^2 - (L_{01})^2 + \frac{(L_{02})^2}{(c_{12})^2} \right)^2} + \\ & + \frac{(L_{01})^2 (L_{02})^2 \left((l_{12})^{-2} + (l_{12})^2 (c_{12})^{-2} - 1 - (c_{12})^{-2} \right)}{\left(f^2 - (L_{01})^2 + \frac{(L_{02})^2}{(c_{12})^2} \right)^2} - \\ & - \frac{2f (L_{02})^2 \sqrt{f^2 (c_{12})^{-2} + \left(1 - (c_{12})^{-2} \right) \left((L_{01})^2 - (L_{02})^2 (c_{12})^{-2} \right)}}{\left(f^2 - (L_{01})^2 + \frac{(L_{02})^2}{(c_{12})^2} \right)^2}. \end{aligned}$$

↓

{	Блок 3. Визначаємо рух за k # Визначаємо кількість кроків для k $n_k = 50$ # кількість значень k $kk = \text{np.linspace}(k_{min}, k_{max}, n_k)$ # лінійне розбиття значень k від k_{min} до k_{max} # Створюється послідовність з чисел k від k_{min} до k_{max}
---	---

↓

Блок 4. Визначаємо рух за M і N

Визначаємо максимальні значення для M і N

$M_{max} = 100$ # Максимальне значення M

$N_{max} = 500$ # Максимальное значение N

Визначаємо кроки для M і N

$stepM = 1$ # Крок зміни M

$stepN = 1$ # Крок зміни N

Створення масивів для M і N з заданими кроками

$M = \text{np.arange}(1, stepM * M_{max}, stepM)$

Масив значень M від 1 до M_{max} з кроком $stepM$

$N = \text{np.arange}(1, stepN * N_{max}, stepN)$

Масив значень N від 1 до N_{max} з кроком $stepN$

↓

Блок 5. Створення порожніх списків для збереження результатів розрахунків

$v1_c1 = []$ # Відношення v_1/c_1

$v2_c2 = []$ # Відношення v_2/c_2

$k_c = []$ # Хвильове число k

$nu_l_01_c1 = []$ # Коефіцієнт $\nu \times l_{01}/c_1$

$nu_l_02_c2 = []$ # Коефіцієнт $\nu \times l_{02}/c_2$

↓

Блок 6. Основний цикл перебору значень k , M , N

Зовнішній цикл — перебирання за k

Вкладений цикл першого рівня — перебирання за M

Вкладений цикл другого рівня — перебирання за N (обрахунок

$f = 4k K(k) \frac{M}{N}$, D_1 , D_2 ,

перевірка умов: $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $(v_1/c_1)^2 < 1$, $(v_2/c_2)^2 < 1$;

перевірка виконання умов циклу та заповнення значень $v_i/c_i = \sqrt{(v_i/c_i)^2}$,

$i = 1, 2$, у списки vi_ci , $i = 1, 2$, відповідно).

↓

{	Блок 7. Перетворення списків у масиви NumPy
	$v1_c1 = \text{np.array}(v1_c1)$
	$v2_c2 = \text{np.array}(v2_c2)$
	$k_c = \text{np.array}(k_c)$
	$nu_l_01_c1 = \text{np.array}(nu_l_01_c1)$
	$nu_l_02_c2 = \text{np.array}(nu_l_02_c2)$

↓

Візуалізація результатів: Малюнки 2.5, 2.6, 2.7

2.3.3 Випадок поширення надкритичної хвилі намагніченості в обох АФМ

Розглянемо випадок поширення надкритичної хвилі намагніченості в обох антиферромагнетиках, тобто випадку розв'язку (2.17) при

$$\beta_{ii} + d_i^2/\delta_i > 0, \quad v_i > c_i, \quad Z_i = \frac{z - v_i t}{l_{0i} \sqrt{\frac{v_i^2}{c_i^2} - 1}}, \quad i = 1, 2. \quad (2.35)$$

Система граничних умов (2.23) перетвориться у випадку (2.35) на систему

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = k_2 = k, \\ \frac{v_1}{l_{01} \sqrt{\frac{v_1^2}{c_1^2} - 1}} = \frac{v_2}{l_{02} \sqrt{\frac{v_2^2}{c_2^2} - 1}}, \\ l_{01} R_1 = l_{02} R_2, \\ NL \left(\frac{1}{l_{01} \sqrt{\frac{v_1^2}{c_1^2} - 1}} - \frac{1}{l_{02} \sqrt{\frac{v_2^2}{c_2^2} - 1}} \right) = 4k K(k) M. \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Після піднесення обох частин другого рівняння системи (2.36) до квадрату та перетворень, одержуємо співвідношення (2.28).

Підставляючи (2.28) в четверте рівняння системи (2.36), отримуємо послідовні перетворення

$$\begin{aligned} L \left(\frac{1}{l_{01} \sqrt{\frac{v_1^2}{c_1^2} - 1}} - \frac{1}{l_{02} \sqrt{\frac{1}{c_2^2} \left(\frac{v_1^2 (l_{02})^2}{v_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} \right) + (l_{01})^2} \right) - 1}} \right) &= 4k \left(\frac{M}{N} \right) K(k), \\ \left(\frac{1}{l_{01} \sqrt{\frac{v_1^2}{c_1^2} - 1}} - \frac{\sqrt{v_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} \right) + (l_{01})^2}}{l_{02} l_{01} c_2 \sqrt{\left(\frac{v_1}{c_1} \right)^2 - 1}} \right) &= \\ &= \frac{4k \frac{M}{N} K(k)}{L}, \end{aligned}$$

$$l_{02} c_2 - \sqrt{v_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} - \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} \right) + (l_{01})^2} = \frac{4k \frac{M}{N} K(k)}{L} l_{01} l_{02} \sqrt{\frac{v_1^2}{c_1^2} - 1}.$$

Підносячи обидві частини одержаного рівняння до квадрату, та здійснюючи необхідні перетворення. Одержуємо формули для v_i^2/c_i^2 , $i = 1, 2$, у вигляді:

$$\begin{aligned} \left((v_1/c_1)^2 \right)_{\pm} &\equiv \left(\frac{v_1}{c_1} \right)^2 = \\ &= \frac{f^4 - f^2 (L_{02})^2 \left((l_{12})^{-2} \left((c_{12})^2 - 1 \right) - 2 \right)}{\left(f^2 + (L_{02})^2 - (L_{01})^2 (c_{12})^2 \right)^2} + \\ &+ \frac{(L_{01})^2 (L_{02})^2 \left((l_{12})^2 + (l_{12})^{-2} (c_{12})^2 - 1 - (c_{12})^2 \right)}{\left(f^2 + (L_{02})^2 - (L_{01})^2 (c_{12})^2 \right)^2} \pm \\ &\pm \frac{2f (L_{01})^2 \sqrt{f^2 (c_{12})^2 - \left(1 - (c_{12})^2 \right) \left((L_{02})^2 - (L_{01})^2 (c_{12})^2 \right)}}{\left(f^2 + (L_{02})^2 - (L_{01})^2 (c_{12})^2 \right)^2}, \quad (2.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left((v_2/c_2)^2 \right)_{\pm} &\equiv \left(\frac{v_2}{c_2} \right)^2 = \\ &= \frac{f^4 - f^2 (L_{01})^2 \left((l_{12})^2 \left((c_{12})^{-2} - 1 \right) - 2 \right)}{\left(f^2 + (L_{01})^2 - \frac{(L_{02})^2}{(c_{12})^2} \right)^2} + \\ &+ \frac{(L_{01})^2 (L_{02})^2 \left((l_{12})^{-2} + (l_{12})^2 (c_{12})^{-2} - 1 - (c_{12})^{-2} \right)}{\left(f^2 + (L_{01})^2 - \frac{(L_{02})^2}{(c_{12})^2} \right)^2} \pm \\ &\pm \frac{2f (L_{02})^2 \sqrt{f^2 (c_{12})^{-2} - \left(1 - (c_{12})^{-2} \right) \left((L_{01})^2 - (L_{02})^2 (c_{12})^{-2} \right)}}{\left(f^2 + (L_{01})^2 - \frac{(L_{02})^2}{(c_{12})^2} \right)^2}, \quad (2.38) \end{aligned}$$

де $c_{12} > 0$, $l_{12} > 0$, $L_{0i} > 0$, $i = 1, 2$, та функція $f = f(k)$ задовольняють співвідношення

$$(c_{12})^2 = \frac{(c_1)^2}{(c_2)^2}, \quad (l_{12})^2 = \frac{(l_{01})^2}{(l_{02})^2}, \quad (L_{0i})^2 = \frac{L^2}{(l_{0i})^2}, \quad i = 1, 2; \quad f = 4k K(k) \frac{M}{N}, \quad (2.39)$$

де k — довільне додатне число.

Аналоги рівностей (2.34) для нашого випадку (2.35) набувають вигляду

$$\nu_{SW} = \frac{1}{T_{SW}} = \frac{v_1}{4k K(k)l_{01}} \sqrt{\frac{v_1^2}{c_1^2} - 1} = \frac{v_2}{4k K(k)l_{02}} \sqrt{\frac{v_2^2}{c_2^2} - 1}. \quad (2.40)$$

Умова застосовності довгохвильового наближення,

$$\frac{\alpha_i}{a_{ll}} \ll \lambda_{SW}^{(i)} \quad \text{для} \quad M_{01} \sim M_{02}, \quad (2.41)$$

одержується аналогічно умові (2.27) та має вигляд

$$\frac{4k K(k) a_{ll} l_{0i}}{\alpha_i} \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c_i^2}} \gg 1, i = 1, 2. \quad (2.42)$$

Розглянемо графічні ілюстрації до розглядуваного випадку (з використанням програмування на мові Python).

Випадок $v_1/c_1 > 1, v_2/c_2 > 1$
комбінація АФМ1/АФМ2: MnPd/MnNi
(див. Додаток В)

$$l_{01} = 27.8, l_{02} = 18.6, l_{12} = 0.6690647482014389, c_{12} = 0.78$$

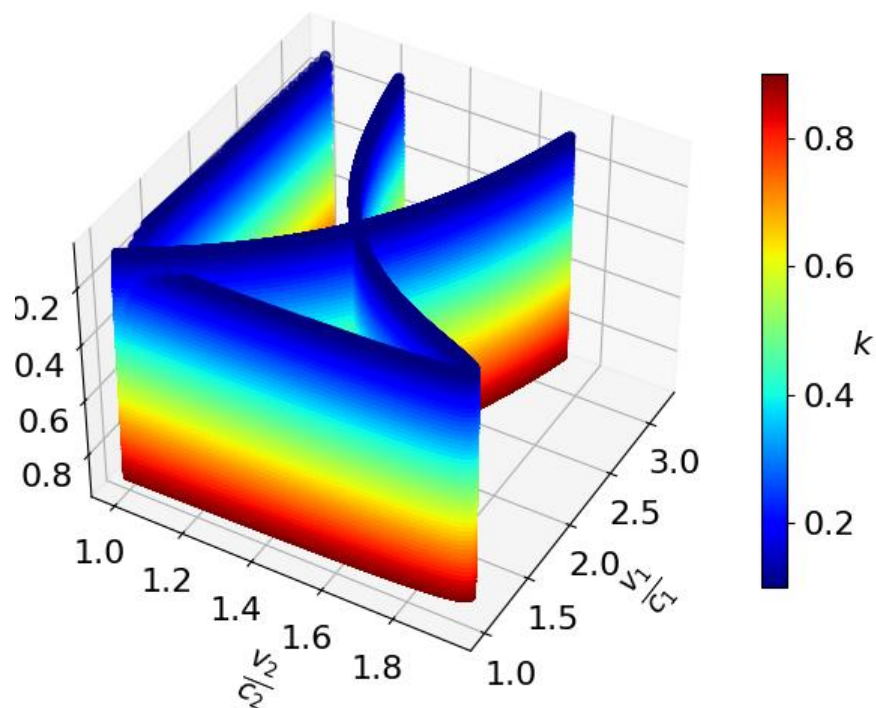


Рис. 2.8: Залежність v_i/c_i , $i = 1, 2$, від різних значень k для $M = 1, 2, \dots, 100$, $N = 1, 2, \dots, 500$, у випадку $v_i/c_i > 1$, $i = 1, 2$, АФМ1/ АФМ2 = MnPd/MnNi ($l_{01} = 27.8$, $l_{02} = 18.6$, $c_{12} = 0.78$)

Малюнок (2.8) візуалізує зв'язок спінових швидкостей в обох АФМ і хвильового числа k у випадку (2.35).

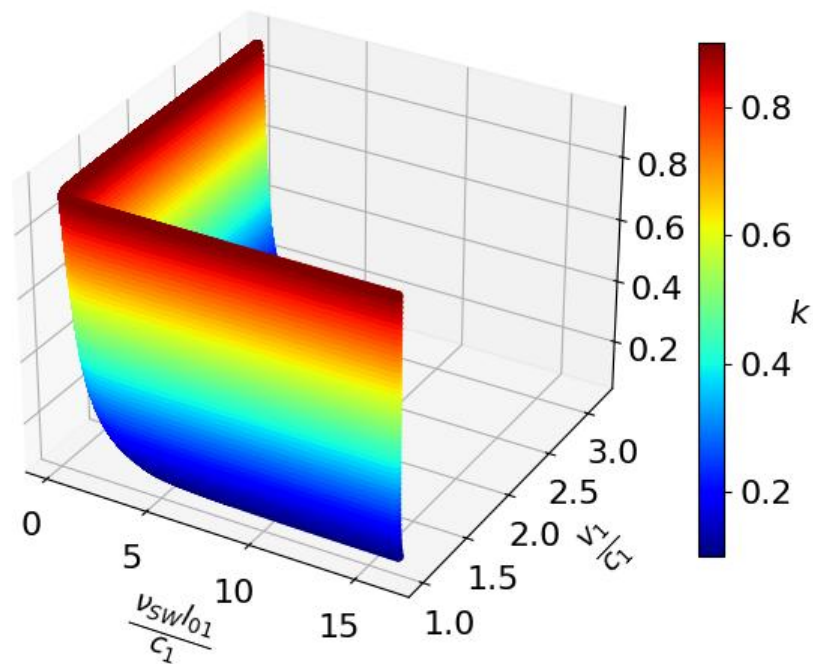


Рис. 2.9: Залежність v_1/c_1 та $(\nu_{sw} l_{01})/c_1$ від різних значень k для $M = 1, 2, \dots, 100$, $N = 1, 2, \dots, 500$, у випадку $v_i/c_i > 1, i = 1, 2$, АФМ1/ АФМ2 = MnPd/MnNi ($l_{01} = 27.8$, $l_{02} = 18.6$, $c_{12} = 0.78$)

Малюнок 2.9 відображає вплив частоти спінових хвиль і характеристичної довжини l_{01} на швидкість в першому АФМ у випадку (2.35).

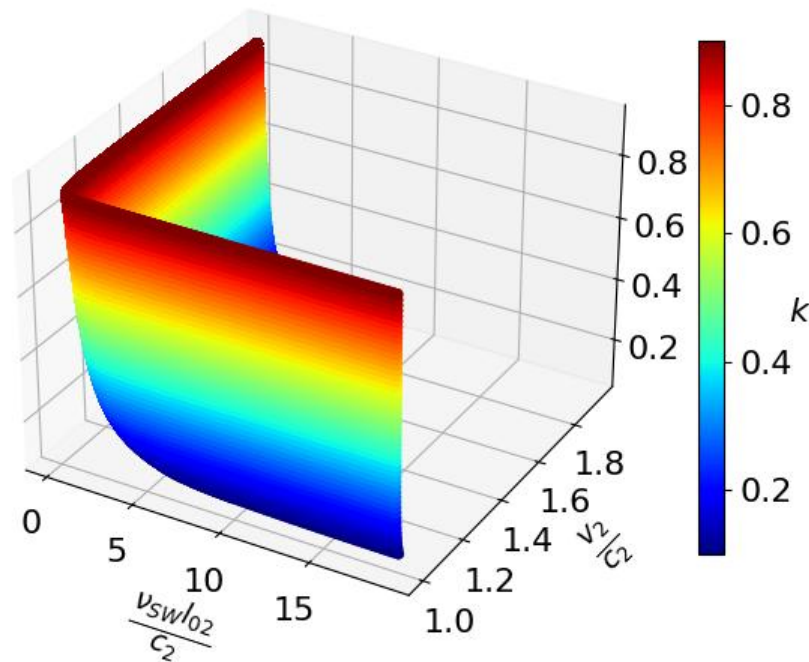


Рис. 2.10: Залежність v_1/c_1 та $(\nu_{SW} l_{02})/c_2$ від різних значень k для $M = 1, 2, \dots, 100$, $N = 1, 2, \dots, 500$, у випадку $v_i/c_i > 1, i = 1, 2$, АФМ1/ АФМ2 = MnPd/MnNi ($l_{01} = 27.8$, $l_{02} = 18.6$, $c_{12} = 0.78$)

Малюнок 2.10 відображає вплив частоти спінових хвиль і характеристичної довжини l_{02} на швидкість в другому АФМ у випадку (2.35).

2.3.4 Випадки розповсюдження докритичної хвилі намагніченості в одному АФМ та надкритичної хвилі намагніченості в іншому

Залишається розглянути *випадки розповсюдження докритичної хвилі намагніченості в одному АФМ та надкритичної хвилі намагніченості в іншому*, тобто коли один з АФМ задовольняє випадку (2.21), інший — випадку (2.35).

Розглянемо спочатку випадок, коли розв'язок (2.17) для першого АФМ задовольняє умови (2.21) для $i = 1$, а для другого АФМ — випадку (2.35)

для $i = 2$, тобто справджуються співвідношення:

$$Z_1 = \frac{z - v_1 t}{l_{01} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}}, \beta_{11} + d_1^2/\delta_1 < 0; Z_2 = \frac{z - v_2 t}{l_{02} \sqrt{\frac{v_2^2}{c_2^2} - 1}}, \beta_{22} + d_2^2/\delta_2 > 0, \quad (2.43)$$

де $v_1 < c_1$, $v_2 > c_2$.

Система умов (2.23) для нашого випадку (2.43) набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = k_2 = k, \\ \frac{v_1}{l_{01} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}} = \frac{v_2}{l_{02} \sqrt{\frac{v_2^2}{c_2^2} - 1}}, \\ l_{01} R_1 = l_{02} R_2, \\ NL \left(\frac{1}{l_{01} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}} - \frac{1}{l_{02} \sqrt{\frac{v_2^2}{c_2^2} - 1}} \right) = 4k K(k) M. \end{array} \right. \quad (2.44)$$

Аналоги рівностей (2.34) набувають вигляду:

$$\nu_{SW} = \frac{1}{T_{SW}} = \frac{v_1}{4k K(k) l_{01}} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}} = \frac{v_2}{4k K(k) l_{02}} \sqrt{\frac{v_2^2}{c_2^2} - 1}. \quad (2.45)$$

Умова застосовності довгохвильового наближення (2.41) одержується з (2.27) за допомогою заміни $\sqrt{1 - v_2^2/c_2^2} \rightarrow \sqrt{v_2^2/c_2^2 - 1}$, отже, має вигляд

$$\frac{4kK(k) a_{ll} l_{01}}{\alpha_1} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}} \gg 1, \quad \frac{4kK(k) a_{ll} l_{02}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{v_2^2}{c_2^2} - 1} \gg 1. \quad (2.46)$$

Нарешті, формули для v_i^2/c_i^2 , $i = 1, 2$, набувають для нашого випадку вигляду:

$$\begin{aligned} \left((v_1/c_1)^2 \right)_{\pm} &\equiv \left(\frac{v_1}{c_1} \right)^2 = \\ &= \frac{f^4 + f^2 (L_{02})^2 \left((l_{12})^{-2} \left((c_{12})^2 - 1 \right) + 2 \right)}{\left(f^2 + (L_{02})^2 + (L_{01})^2 (c_{12})^2 \right)^2} + \\ &+ \frac{(L_{01})^2 (L_{02})^2 \left((l_{12})^2 + (l_{12})^{-2} (c_{12})^2 + 1 + (c_{12})^2 \right)}{\left(f^2 + (L_{02})^2 + (L_{01})^2 (c_{12})^2 \right)^2} \pm \\ &\pm \frac{2f (L_{01})^2 \sqrt{f^2 (c_{12})^2 - \left(1 - (c_{12})^2 \right) \left((L_{02})^2 + (L_{01})^2 (c_{12})^2 \right)}}{\left(f^2 + (L_{02})^2 + (L_{01})^2 (c_{12})^2 \right)^2}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned}
\left((v_2/c_2)^2 \right)_\pm &\equiv \left(\frac{v_2}{c_2} \right)^2 = \\
&= \frac{f^4 - f^2 (L_{01})^2 \left((l_{12})^2 \left((c_{12})^{-2} - 1 \right) + 2 \right)}{\left(f^2 - (L_{01})^2 - \frac{(L_{02})^2}{(c_{12})^2} \right)^2} + \\
&+ \frac{(L_{01})^2 (L_{02})^2 \left((l_{12})^{-2} + (l_{12})^2 (c_{12})^{-2} + 1 + (c_{12})^{-2} \right)}{\left(f^2 - (L_{01})^2 - \frac{(L_{02})^2}{(c_{12})^2} \right)^2} \pm \\
&\pm \frac{2f (L_{02})^2 \sqrt{f^2 (c_{12})^{-2} + \left(1 - (c_{12})^{-2} \right) \left((L_{01})^2 + (L_{02})^2 (c_{12})^{-2} \right)}}{\left(f^2 - (L_{01})^2 - \frac{(L_{02})^2}{(c_{12})^2} \right)^2},
\end{aligned} \tag{2.48}$$

де, як і раніше, величини, які входять у праву частину рівностей (2.47), (2.48) задовольняють умови (2.39).

Доведемо формули (2.47), (2.48) за загальних умов (у тому числі і при $M \neq N$).

З другого рівняння системи (2.44) одержуємо співвідношення

$$v_2^2 = \frac{l_{02}^2 v_1^2}{\left(\frac{l_{01}^2}{c_1^2} + \frac{l_{02}^2}{c_2^2} \right) v_1^2 - l_{01}^2}.$$

Підставляючи отриманий вище вираз для $(v_2)^2$ в четверте рівняння системи (2.44), отримуємо послідовні перетворення

$$\begin{aligned}
L \left(\frac{1}{l_{01} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}} - \frac{1}{l_{02} \sqrt{\frac{1}{c_2^2} \left(\frac{v_1^2 (l_{02})^2}{v_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} + \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} \right) - (l_{01})^2} \right) - 1}} \right) &= 4k \frac{M}{N} K(k), \\
\left(\frac{1}{l_{01} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}} - \frac{\sqrt{v_1^2 \left((l_{02})^2 + (l_{01})^2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) - (l_{01})^2 c_2^2}}{l_{02} \sqrt{v_1^2 (l_{02})^2 - \left(v_1^2 \left((l_{02})^2 + \frac{c_2^2 (l_{01})^2}{c_1^2} \right) - (l_{01})^2 c_2^2} \right)}} \right) &=
\end{aligned}$$

$$= \frac{4k \frac{M}{N} K(k)}{L},$$

$$\frac{1}{l_{01} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}} - \frac{\sqrt{v_1^2 \left(\frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \frac{(l_{02})^2}{c_2^2} \right) - (l_{01})^2}}{l_{01} l_{02} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}} = \frac{4k \frac{M}{N} K(k)}{L},$$

$$\frac{1}{l_{01} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}} \left(1 - \frac{\sqrt{v_1^2 \left(\frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \frac{(l_{02})^2}{c_2^2} \right) - (l_{01})^2}}{l_{02}} \right) = \frac{4k \frac{M}{N} K(k)}{L},$$

$$l_{02} - \sqrt{\left(\frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \frac{(l_{02})^2}{c_2^2} \right) v_1^2 - (l_{01})^2} = \frac{4k \frac{M}{N} K(k)}{L} l_{01} l_{02} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}},$$

$$\begin{aligned} (l_{02})^2 + \left(\frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \frac{(l_{02})^2}{c_2^2} \right) v_1^2 - (l_{01})^2 - 2l_{02} \sqrt{\left(\frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \frac{(l_{02})^2}{c_2^2} \right) v_1^2 - (l_{01})^2} = \\ = \left(\frac{4k \frac{M}{N} K(k)}{L} l_{01} l_{02} \right)^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{c_1^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (l_{02})^2 + \left(\frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \frac{(l_{02})^2}{c_2^2} \right) v_1^2 - (l_{01})^2 - \left(\frac{4k \frac{M}{N} K(k)}{L} l_{01} l_{02} \right)^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{c_1^2} \right) = \\ = 2l_{02} \sqrt{\left(\frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \frac{(l_{02})^2}{c_2^2} \right) v_1^2 - (l_{01})^2}, \\ (l_{02})^2 + \left(\frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \frac{(l_{02})^2}{c_2^2} + \left(\frac{4k \frac{M}{N} K(k)}{L} \frac{l_{01} l_{02}}{c_1} \right)^2 \right) v_1^2 - (l_{01})^2 - \left(\frac{4k \frac{M}{N} K(k)}{L} l_{01} l_{02} \right)^2 = \\ = 2l_{02} \sqrt{\left(\frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \frac{(l_{02})^2}{c_2^2} \right) v_1^2 - (l_{01})^2}. \end{aligned}$$

Позначимо

$$k_1 := (l_{01})^2/c_1^2 + (l_{02})^2/c_2^2, \quad A_0 := \frac{4k \frac{M}{N} K(k)}{L} l_{01} l_{02}, \quad A_* := (l_{02})^2 - (l_{01})^2 - A_0^2. \quad (2.49)$$

Тоді остання рівність перепишеться у вигляді

$$A_* + \left(k_1 + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right) v_1^2 = 2l_{02} \sqrt{k_1 v_1^2 - (l_{01})^2},$$

підносимо далі її почленно до квадрату, одержуємо послідовно еквівалентні рівняння відносно змінної v_1^2 :

$$\begin{aligned} \left(k_1 + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right)^2 v_1^4 + 2A_* \left(k_1 + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right) v_1^2 + A_*^2 &= 4(l_{02})^2 (k_1 v_1^2 - (l_{01})^2), \\ \left(k_1 + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right)^2 (v_1^2)^2 + \left(2A_* \left(k_1 + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right) - 4(l_{02})^2 k_1\right) v_1^2 &+ (A_*^2 + 4(l_{02})^2 (l_{01})^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Отримане біквадратне (відносно v_1^2) рівняння (2.50) має розв'язки:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \frac{-\left(2A_* \left(k_1 + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right) - 4(l_{02})^2 k_1\right)}{2 \left(k_1 + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right)^2} \pm \\ &\pm \frac{\sqrt{\left(2A_* \left(k_1 + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right) - 4(l_{02})^2 k_1\right)^2 - 4 \left(k_1 + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right) (A_*^2 + 4(l_{02})^2 (l_{01})^2)}}{2 \left(k_1 + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right)^2}, \end{aligned}$$

або, після спрощення та враховуючи означення k_1 та A_* , одержуємо

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \frac{-\left(A_* \left(k_1 + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right) - 2(l_{02})^2 k_1\right)}{\left(k_1 + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right)^2} \pm \\ &\pm \frac{\sqrt{\left(A_* \left(k_1 + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right) - 2(l_{02})^2 k_1\right)^2 - \left(k_1 + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right) (A_*^2 + 4(l_{02})^2 (l_{01})^2)}}{\left(k_1 + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right)^2}, \\ &= \frac{-\left(\left((l_{02})^2 - (l_{01})^2 - A_0^2\right) \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} + \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right) - 2(l_{02})^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} + \frac{(l_{01})^2}{c_1^2}\right)\right)}{c_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} + \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right)^2} \pm \\ &\pm \frac{\sqrt{F_2}}{c_1^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{c_2^2} + \frac{(l_{01})^2}{c_1^2} + \frac{A_0^2}{c_1^2}\right)^2}, \end{aligned} \quad \left(\frac{v_1}{c_1}\right)^2 = \quad (2.51)$$

де

$$F_2 = \left((l_{02}^2 - l_{01}^2 - A_0^2) \left(\frac{l_{01}^2}{c_1^2} + \frac{l_{02}^2}{c_2^2} + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right) - 2l_{02}^2 \left(\frac{l_{01}^2}{c_1^2} + \frac{l_{02}^2}{c_2^2} \right) \right)^2 - \\ - \left(\frac{l_{01}^2}{c_1^2} + \frac{l_{02}^2}{c_2^2} + \frac{A_0^2}{c_1^2} \right) \left((l_{02}^2 - l_{01}^2 - A_0^2)^2 + 4(l_{01})^2(l_{02})^2 \right).$$

послідовно одержуємо співвідношення

$$(A_0)^2 = \frac{L^4}{(L_{01} L_{02})^2} f^2, \quad 4(l_{01})^2(l_{02})^2 = 4 \frac{L^4}{(L_{01})^2 (L_{02})^2}, \\ (l_{02})^2 - (l_{01})^2 - (A_0)^2 = \frac{L^2}{(L_{01} L_{02})^2} \left((L_{02})^2 - (L_{01})^2 - L^2 f^2 \right), \\ \frac{(l_{02})^2}{(c_2)^2} + \frac{(l_{01})^2}{(c_1)^2} + \frac{(A_0)^2}{c_1^2} = \frac{1}{(c_1)^2} \frac{L^2}{(L_{01} L_{02})^2} \left(L^2 f^2 + (L_{02})^2 + (L_{01})^2 (c_{12})^2 \right), \\ 2(l_{02})^2 \left(\frac{(l_{02})^2}{(c_2)^2} + \frac{(l_{01})^2}{(c_1)^2} \right) = 2 \frac{L^4}{(c_1)^2 (L_{01})^2 (L_{02})^4} \left((c_{12})^2 (L_{01})^2 + (L_{02})^2 \right),$$

звідки, після елементарних перетворень, рівність (2.51) набуває вигляду (2.47). Аналогічно доводиться формула (2.48).

Розглянемо графічні ілюстрації до розглядуваного випадку (з використанням програмування на мові Python).

Випадок $v_1/c_1 < 1$, $v_2/c_2 > 1$
комбінація АФМ1/АФМ2: MnPt/MnNi
(див. Додаток В)

$$l_{01} = 16.0, \quad l_{02} = 18.6, \quad l_{12} = 1.15, \quad c_{12} = 3.1$$

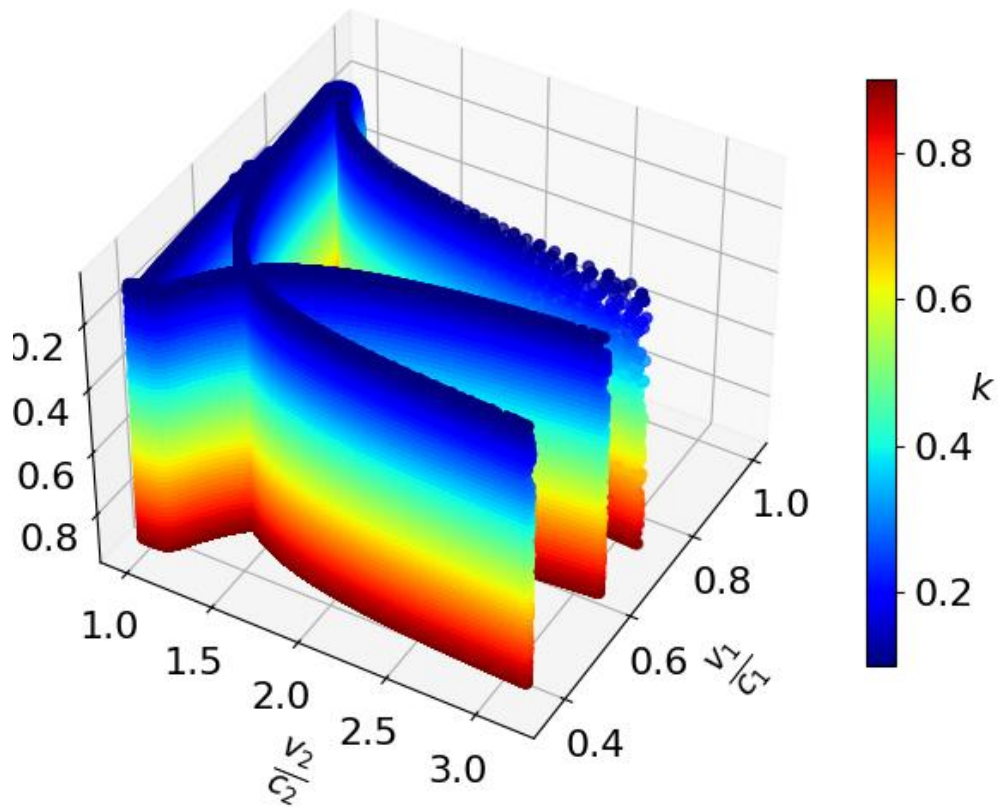


Рис. 2.11: Залежність v_i/c_i , $i = 1, 2$, від різних значень k для $M = 1, 2, \dots, 100$, $N = 1, 2, \dots, 500$, у випадку $v_1/c_1 < 1$, $v_2/c_2 > 1$, АФМ1/ АФМ2 = MnPt/MnNi ($l_{01} = 16, 0$, $l_{02} = 18.6$, $c_{12} = 3.1$)

Малюнок (2.11) візуалізує зв'язок спінових швидкостей в обох АФМ і хвильового числа k у випадку (2.43).

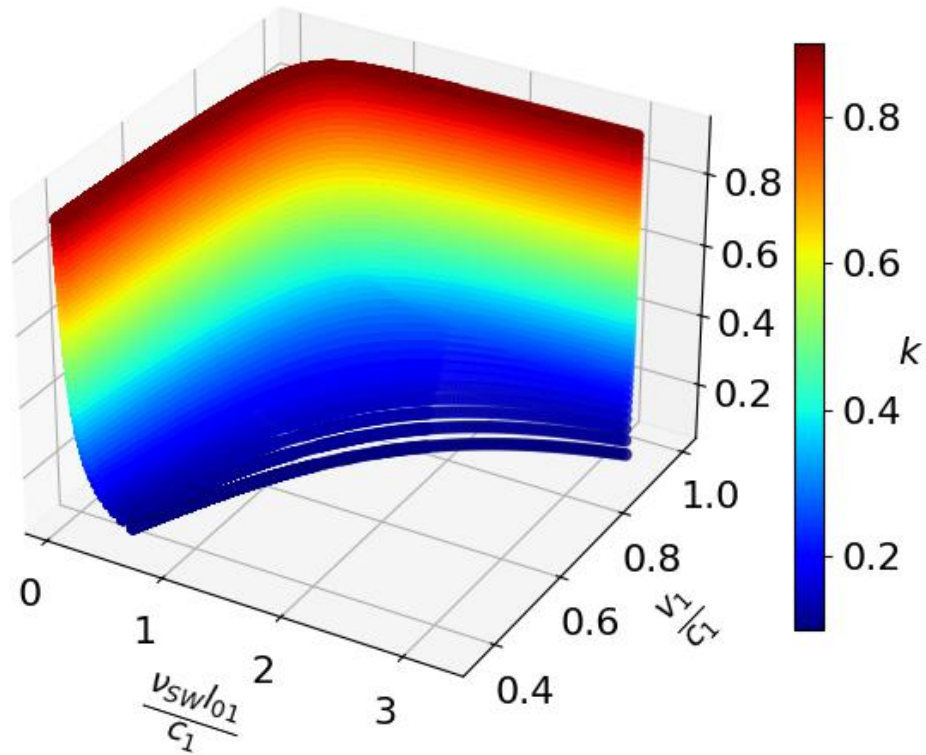


Рис. 2.12: Залежність v_1/c_1 та $(v_{sw} l_{01})/c_1$ від різних значень k для $M = 1, 2, \dots, 100$, $N = 1, 2, \dots, 500$, у випадку $v_1/c_1 < 1$, $v_2/c_2 > 1$, АФМ1 АФМ2 = MnPt/MnNi ($l_{01} = 16, 0$, $l_{02} = 18.6$, $c_{12} = 3.1$)

Малюнок 2.12 відображає вплив частоти спінових хвиль і характеристичної довжини l_{01} на швидкість в першому АФМ у випадку (2.43).

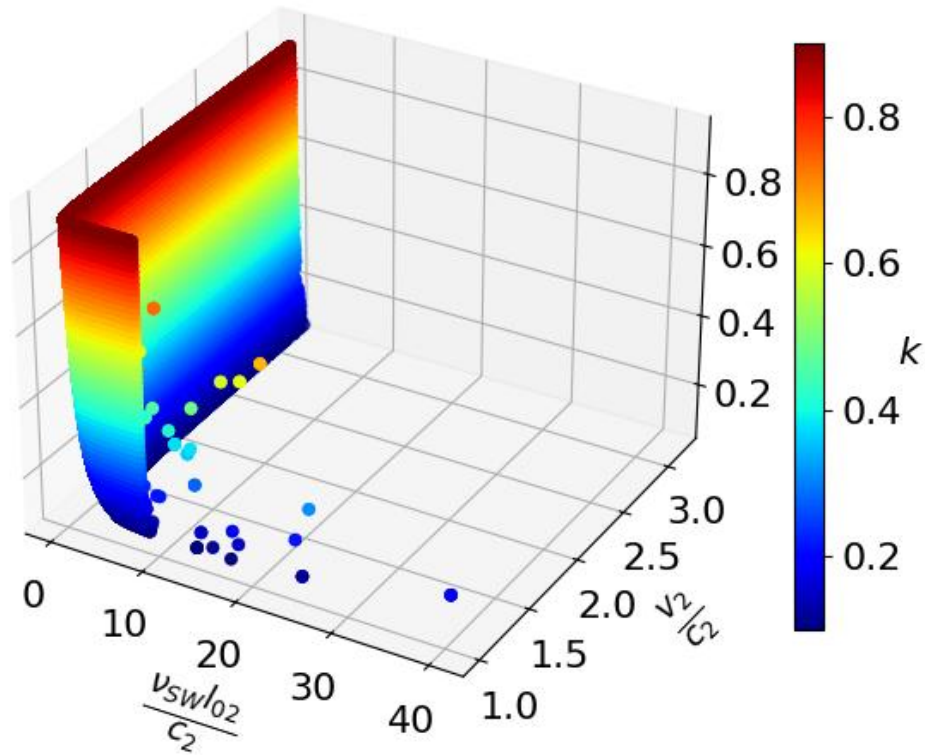


Рис. 2.13: Залежність v_2/c_2 та $(v_{sw} l_{02})/c_2$ від різних значень k для $M = 1, 2, \dots, 100$, $N = 1, 2, \dots, 500$, у випадку $v_1/c_1 < 1$, $v_2/c_2 > 1$, АФМ1/ АФМ2 = MnPt/MnNi ($l_{01} = 16,0$, $l_{02} = 18,6$, $c_{12} = 3,1$)

Малюнок 2.13 відображає вплив частоти спінових хвиль і характерної довжини l_{02} на швидкість в другому АФМ у випадку (2.43).

Випадок, коли розв'язок (2.17) для другого АФМ задовольняє умови (2.21) для $i = 2$, а для першого АФМ — випадку (2.35) для $i = 1$, тобто справджуються співвідношення

$$Z_1 = \frac{z - v_1 t}{l_{01} \sqrt{\frac{v_1^2}{c_1^2} - 1}}, \beta_{11} + d_1^2/\delta_1 > 0; Z_2 = \frac{z - v_2 t}{l_{02} \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c_2^2}}}, \beta_{22} + d_2^2/\delta_2 < 0, \quad (2.52)$$

де $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$, розглядається аналогічно випадку (2.43).

Відповідні формули випадку (2.52) одержуються аналогічно виведенню відповідних формул випадку (2.43). Наведемо їх.

Система умов (2.23) для нашого випадку (2.52) набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = k_2 = k, \\ \frac{v_1}{l_{01}\sqrt{\frac{v_1^2}{c_1^2}-1}} = \frac{v_2}{l_{02}\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c_2^2}}}, \\ l_{01} R_1 = l_{02} R_2, \\ NL \left(\frac{1}{l_{01}\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c_1^2}}} - \frac{1}{l_{02}\sqrt{\frac{v_2^2}{c_2^2}-1}} \right) = 4k K(k)M. \end{array} \right. \quad (2.53)$$

Умова застосовності довгохвильового наближення (2.41) одержується з (2.46) за допомогою заміни індексів $1 \leftrightarrow 2$, отже, має вигляд

$$\frac{4kK(k) a_{ll}l_{01}}{\alpha_1} \sqrt{\frac{v_1^2}{c_1^2}-1} \gg 1, \quad \frac{4kK(k) a_{ll}l_{02}}{\alpha_2} \sqrt{1-\frac{v_2^2}{c_2^2}} \gg 1. \quad (2.54)$$

Аналоги формул (2.45) мають вигляд

$$\nu_{SW} = \frac{1}{T_{SW}} = \frac{v_1}{4k K(k)l_{01}} \sqrt{\frac{v_1^2}{c_1^2}-1} = \frac{v_2}{4k K(k)l_{02}} \sqrt{1-\frac{v_2^2}{c_2^2}}. \quad (2.55)$$

Нарешті, формули для v_i^2/c_i^2 , $i = 1, 2$, набувають для нашого випадку вигляду:

$$\begin{aligned} \left((v_1/c_1)^2 \right)_\pm &\equiv \left(\frac{v_1}{c_1} \right)^2 = \\ &= \frac{f^4 - f^2 (L_{02})^2 \left((l_{12})^{-2} \left((c_{12})^2 - 1 \right) + 2 \right)}{\left(f^2 - (L_{02})^2 - (L_{01})^2 (c_{12})^2 \right)^2} + \\ &+ \frac{(L_{01})^2 (L_{02})^2 \left((l_{12})^2 + (l_{12})^{-2} (c_{12})^2 + 1 + (c_{12})^2 \right)}{\left(f^2 - (L_{02})^2 - (L_{01})^2 (c_{12})^2 \right)^2} \pm \\ &\pm \frac{2f (L_{01})^2 \sqrt{f^2 (c_{12})^2 + \left(1 - (c_{12})^2 \right) \left((L_{02})^2 + (L_{01})^2 (c_{12})^2 \right)}}{\left(f^2 - (L_{02})^2 - (L_{01})^2 (c_{12})^2 \right)^2}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned}
\left((v_2/c_2)^2 \right)_\pm &\equiv \left(\frac{v_2}{c_2} \right)^2 = \\
&= \frac{f^4 + f^2 (L_{01})^2 \left((l_{12})^2 \left((c_{12})^{-2} - 1 \right) + 2 \right)}{\left(f^2 + (L_{01})^2 + (L_{02})^2 (c_{12})^{-2} \right)^2} + \\
&+ \frac{(L_{01})^2 (L_{02})^2 \left((l_{12})^{-2} + (l_{12})^2 (c_{12})^{-2} + 1 + (c_{12})^{-2} \right)}{\left(f^2 + (L_{01})^2 + (L_{02})^2 (c_{12})^{-2} \right)^2} \pm \\
&\pm \frac{2f (L_{02})^2 \sqrt{f^2 (c_{12})^{-2} - \left(1 - (c_{12})^{-2} \right) \left((L_{01})^2 + (L_{02})^2 (c_{12})^{-2} \right)}}{\left(f^2 + (L_{01})^2 + (L_{02})^2 (c_{12})^{-2} \right)^2}, \quad (2.57)
\end{aligned}$$

де, як і раніше, величини, які входять у праву частину рівностей (2.57), (2.57) задовольняють умови (2.39).

Розглянемо графічні ілюстрації до розглядуваного випадку (з використанням програмування на мові Python).

Випадок $v_1/c_1 > 1$, $v_2/c_2 < 1$
комбінація АФМ1/АФМ2: MnIr/MnN
(див. Додаток В)

$$l_{01} = 72,5, \quad l_{02} = 2,78, \quad l_{12} = 0.038344827586206894, \quad c_{12} = 0.895$$

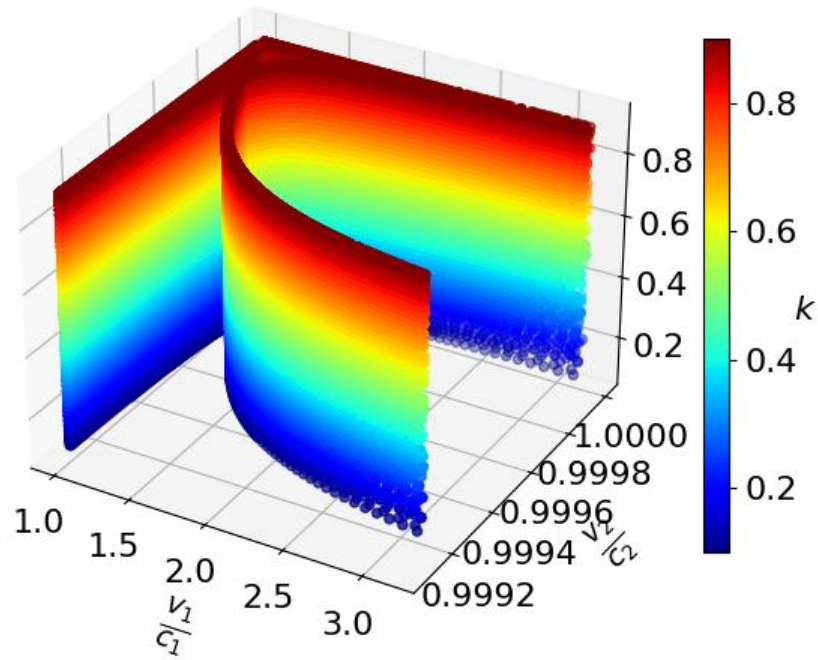


Рис. 2.14: Залежність v_i/c_i , $i = 1, 2$, від різних значень k для $M = 1, 2, \dots, 100$, $N = 1, 2, \dots, 500$, у випадку $v_1/c_1 > 1$, $v_2/c_2 < 1$, АФМ1/ АФМ2 = MnIr/MnN ($l_{01} = 72,5$, $l_{02} = 2,78$, $c_{12} = 0.895$)

Малюнок (2.14) візуалізує зв'язок спінових швидкостей в обох АФМ і хвильового числа k у випадку (2.52).

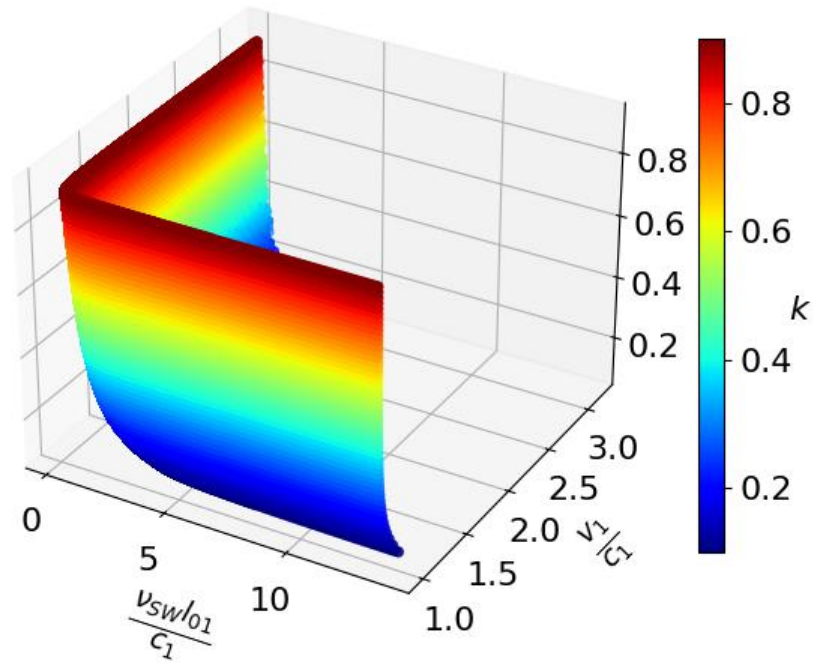


Рис. 2.15: Залежність v_1/c_1 та $(v_{sw} l_{01})/c_1$ від різних значень k для $M = 1, 2, \dots, 100$, $N = 1, 2, \dots, 500$, у випадку $v_1/c_1 > 1$, $v_2/c_2 < 1$, АФМ1/ АФМ2 = MnIr/MnN ($l_{01} = 72,5$, $l_{02} = 2,78$, $c_{12} = 0.895$)

Малюнок 2.15 відображає вплив частоти спінових хвиль і характеристичної довжини l_{01} на швидкість в першому АФМ у випадку (2.52).

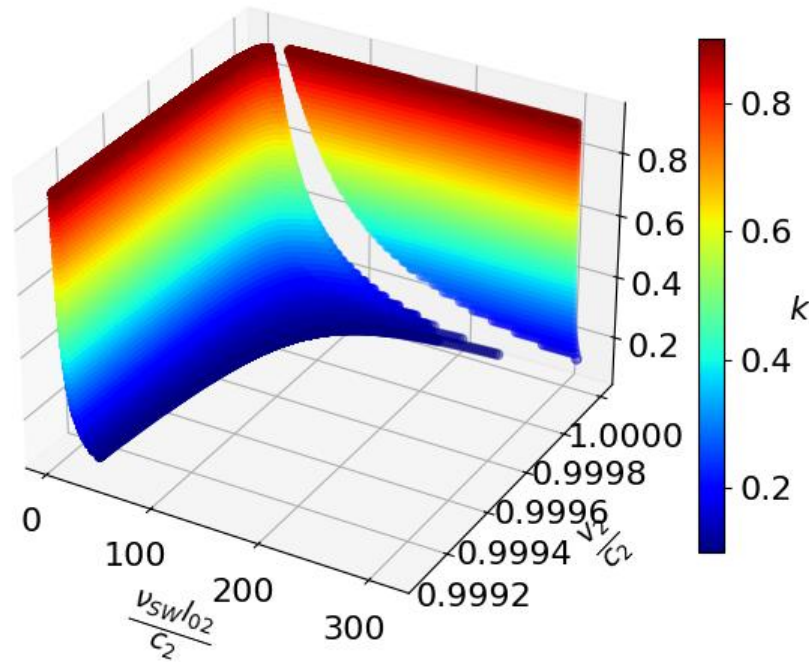


Рис. 2.16: Залежність v_2/c_2 та $(v_{sw} l_{02})/c_2$ від різних значень k для $M = 1, 2, \dots, 100$, $N = 1, 2, \dots, 500$, у випадку $v_1/c_1 > 1$, $v_2/c_2 < 1$, АФМ1/ АФМ2 = MnIr/MnN ($l_{01} = 72,5$, $l_{02} = 2,78$, $c_{12} = 0.895$)

Малюнок 2.16 відображає вплив частоти спінових хвиль і характеристичної довжини l_{02} на швидкість в другому АФМ у випадку (2.52).

Висновки до розділу 2

У даному розділі знайдено швидкості нелінійних спінових хвиль у явному вигляді для кожного АФМ, які відповідають граничним умовам для певного класу розв'язків системи рівнянь Ландау–Ліфшиця для кожного АФМ відносно сігма-моделі та довгохвильового наближення.

Знайдено коректні граничні умови для певного класу розв'язків системи рівнянь Ландау–Ліфшиця для кожного АФМ відносно сігма-моделі та довгохвильового наближення, крім того, знайдено явні формули швидкостей спінових хвиль для даних граничних умов та досліджено їх залежність від

дійсного параметру k (аргумент відповідного еліптичного інтегралу першого роду). При цьому швидкості спінової хвилі знайдено для таких випадків (відносно АФМ) в досліджуваному магнонному кристалі: докритичне поширення хвилі намагніченості в обох АФМ, поширення надкритичної хвилі намагніченості в обох АФМ, розповсюдження докритичної хвилі намагніченості в одному АФМ та надкритичної хвилі намагніченості в іншому. Для кожного випадку обраховано період та частота відповідної спінової хвилі, знайдено умову застосовності довгохвильового наближення, проведено чисельні експерименти.

Результати розділу викладено у публікаціях здобувача [1], [3].

ВИСНОВКИ

Отже, в дисертаційній роботі зроблено внесок у теорію періодичних мультишарових наноструктур типу антиферромагнетик–антиферромагнетик з одноосною магнітною анізотропією. Виведено граничні умови для вектора антиферромагнетизма на чотирьохпідгратковому інтерфейсі між двома дво-хпідгратковими антиферромагнетиками з одноосьовою магнітною анізотропією, знайдено закономірності розповсюдження нелінійних спінових хвиль в антиферромагнітних магнетонних кристалах. Усі основні результати є новими.

До основних результатів дисертації можуть бути віднесені такі:

1. Граничні умови для рівняння Ландау–Ліфшиця в сігма-моделі на інтерфейсі між двома дво-хпідгратковими антиферромагнетиками, отримані в даній дисертаційній роботі, є аналогічними до граничних умов на інтерфейсі між двома ферромагнетиками з тією відмінністю, що в них входить вектор антиферромагнетизму замість вектора намагніченості.

2. Швидкості нелінійних спінових хвиль в антиферромагнітному магнетонному кристалі як в докритичному режимі, так і в змішаному та надкритичному залежать не тільки від властивостей антиферромагнітних матеріалів, а й від довільного раціонального числа, тому формується злічений набір дозволених швидкостей. Ця властивість нелінійних спінових хвиль в антиферромагнітних магнетонних кристалах дає переваги для їх використання в магнетонних пристроях передачі інформації.

3. Докритичний режим розповсюдження нелінійних спінових хвиль реалізується в антиферромагнітних магнетонних кристалах, які складаються із таких дво-хпідграткових антиферромагнітних матеріалів, які мають магнітну анізотропію типу «легка вісь», наприклад, в мультишарових структурах типу MnN / MnPt.

4. Надкритичний режим розповсюдження нелінійних спінових хвиль реалізується в антиферромагнітних магнетонних кристалах, які складаються із таких дво-хпідграткових антиферромагнітних матеріалів, які мають магнітну анізотропію типу «легка площина», наприклад, в мультишарових структурах типу MnIr

/ MnPd, MnIr / MnNi, MnIr / MnRd, MnPd / MnNi, MnPd / MnRd, MnNi / MnRd, MnNi / MnPd.

5. Змішаний (тобто до- та надкритичний) режим розповсюдження нелінійних спінових хвиль реалізується в антиферомагнітних магнетонних кристалах, які складаються із таких двох антиферомагнітних матеріалів, один з яких має магнітну анізотропію типу «легка вісь», а другий — «легка площина», наприклад, в мультишарових структурах типу MnN / MnPd, MnN / MnNi, MnN / MnRd, MnN / MnIr, MnPt / MnPd, MnPt / MnNi, MnPt / MnRd, MnPt / MnIr.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Gorobets O. Yu., Kulish V. V., Syzon I. A., Theory of propagation of nonlinear spin wave through an antiferromagnetic magnonic crystal with four-sublattice interfaces. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2023. Vol. 587, Article ID: 171266.
2. Syzon I., Gorobets O., Kulish V., Supercritical propagation of nonlinear magnetization wave through an antiferromagnetic magnonic crystal. *Book of Abstracts of Bogolyubov Kyiv Conference «Problems of Theoretical and Mathematical Physics» dedicated to the 115-th anniversary of the outstanding theoretician in physics and mathematics Mykola Bogolyubov, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics (Sections 1–4)*. 2024. Kyiv, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, 24–26 September 2024, p. 37.
3. Gorobets O. Yu., Kulish V. V., Syzon I. A., Provolovska D. V. Supercritical Propagation of Nonlinear Magnetization Wave Through an Antiferromagnetic Magnonic Crystal. *Vladymyrskyi I., Hillebrands B., Serha A., Makarov D., Prokopenko O. (eds) Functional Magnetic and Spintronic Nanomaterials. NATO 2023. NATO Science for Peace and Security Series B: Physics and Biophysics*. 2024. Dordrecht: Springer, P. 147–175.
4. Gerasimchuk V. S., Gorobets Yu. I., Gorobets O. Yu. et al. Spatial antiferromagnetic spin texture as a nano-oscillator. *Sci. Rep.* 2023. Vol. 13, Article ID: 6613.
5. Liu H. Y., Wang Z. K., Lim H. S. et. al. Magnetic-Field Dependence of Spin Waves in Ordered Permalloy Nanowire Arrays in Two Dimensions. *J. Appl. Phys.* 2005. Vol. 98, Article ID: 046103.
6. Scott G. G. Review of Gyromagnetic Ratio Experiments *Rev. Mod. Phys.* 1962, Vol. 34, 102.

7. Gorobets O. Yu., Gorobets Yu. I. 3D Analytical Model of Skyrmion-like Structures in an Antiferromagnet with DMI, *J. Magn. Magn. Mater.* 2020. Vol. 507, Article ID: 1668.
8. Gorobets O. Yu. Degeneration of magnetic states of the order parameter relative to the boundary conditions and discrete energy spectrum in ferromagnetic and antiferromagnetic nanotubes. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2008. Vol. 36, P. 671–676.
9. Горобець Ю. І., Горобець О. Ю., Куліш В. В. Распределение вектора антиферромагнетизма для изолированной антиточки и системы отдаленных антиточек в антиферромагнетике. *Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»*. 2014, № 4, С. 113–118.
10. Gorobets Yu. I., Gorobets O. Yu., Singular optics of spin waves in a two-sublattice antiferromagnet with uniaxial magnetic anisotropy. 2017. *Low Temperature Physics*. Vol. 43, No. 5, P. 564–569.
11. Gorobets Yu. I., Gorobets O. Yu., Kulish V. V. Spin waves in a two-sublattice antiferromagnet. A self-similar solution of the Landau-Lifshitz equation. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2017. Vol. 42, P. 52–61.
12. Kruglyak V. V., Gorobets O. Yu., Gorobets Yu. I., Kuchko A. N. Magnetization Boundary Conditions at a Ferromagnetic Interface of Finite Thickness. *J. Phys. Condens. Matter*. 2014, Vol. 26.
13. Mailian M., Gorobets O. Yu., Gorobets Yu. I., Zelent M., Krawczyk M. Control of the Spin Wave Phase in Transmission through the Ultrathin Interface between Exchange Coupled Ferromagnetic Materials. *Acta Phys. Pol. A*. 2018. Vol. 133, No. 3, P. 480–482.
14. Mailian M., Gorobets O. Yu., Gorobets Yu. I., Zelent M., Krawczyk M. Exchange Spin Waves Transmission through the Interface between Two Antiferromagnetically Coupled Ferromagnetic Media. *J. Magn. Magn. Mater.* 2019. Vol. 484, P. 484–489.

15. Gruszecki P., Mailyan M., Gorobets O., Krawczyk M. Goos-Hänchen Shift of a Spin-Wave Beam Transmitted through Anisotropic Interface between Two Ferromagnets. *Phys. Rev. B*. 2017. Vol. 95, Article ID: 014421.
16. Zelent M., Mailyan M., Vashistha V., Gruszecki P., Gorobets O. Yu., Gorobets Yu. I., Krawczyk M. Spin Wave Collimation Using a Flat Metasurface. *Nanoscale*. 2019. Vol. 11, No. 19, P. 9743–9748.
17. Ivanov B. A., Stephanovich V. A. Two-dimensional soliton dynamics in ferromagnets. *Physics Letters A*. 1989. Vol. 141, No. 1-2, P. 89–94.
18. Ivanov B. A., Kosevich A. M., Kovalev A. S. Magnetic Solitons. *Physics Reports*. 1990. Vol. 194, P. 119–238.
19. Ivanov B. A., Sukstanskii A. L. On magnetic relaxation in antiferromagnets. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 1992. Vol. 117, No. 1-2, P. 102–118.
20. Ivanov B. A., Sheka D. D. Two-dimensional magnetic solitons and thermodynamics of quasi-two-dimensional magnets. *Chaos, Solitons & Fractals*. 1995. Vol. 5, No. 12, P. 2605–2622.
21. Nikitov S. A., Safin A. R., Kalyabin D. V. et al. Dielectric magnonics: from gigahertz to terahertz. *Physics–Uspekhi*. 2020. Vol. 63, No. 10, P. 945–974.
22. Galkina E. G., Ivanov B. A., Safaryan K. A. Theory of retardation of magnetic domain walls in rhombic magnetic materials. *J. Exp. Theor. Phys.* 1997. Vol. 84, No. 1, P. 87–95.
23. Akhiezer A. I., Bar'yakhtar V. G., Peletminskii S. V. *Spin Waves*, Amsterdam: North-Holl, 1968.
24. Bar'yakhtar V. G., Ivanov B. A., Sukstanskii A. L., Nonlinear Waves and the Dynamics of Domain Walls in Weak Ferromagnets. *Sov. Phys. JETP*. 1980. Vol. 51, No. 4, P. 757–764.
25. Барьяхтар В. Г., Иванов Б. А. *В мире магнитных доменов*. Киев: Наукова думка, 1986.

26. Куліш В.В. *Магнітні спін-хвильові та одноелектронні оптичні властивості наносистем оболонкового типу*. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук. Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2019.
27. Gorobets O. Yu., Degeneration of Magnetic States of the Order Parameter Relative to the Boundary Conditions and Discrete Energy Spectrum in Ferromagnetic and Antiferromagnetic Nanotubes. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2008. Vol. 36, No. 3, P. 671–676.
28. Baryakhtar V. G., Gorobets O. Yu., Gorobets V. Yu. Some Exact Distributions of Order Parameter in Antiferromagnetic and Ferromagnetic Media. *J. Magn. Magn. Mater.* 2004. Vol. 280, No. 2-3, P. 377–380.
29. Gorobets O. Yu., Gorobets V. Yu. Class of Exact Three Dimensional Solutions of Landau-Lifshitz Equations in Simply Connected Specimens of Ferromagnets and Antiferromagnets of Arbitrary Shape with Uniaxial Magnetic Anisotropy. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2005. Vol. 23, Article ID: 1121.
30. Prabhakar A., Stancil D. *Spin waves: Theory and applications*. Vol. 5, Springer US, 2009.
31. Туров Е. А. *Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов*. Москва: Изд-во АН Наук СССР, 1963.
32. Туров Е. А., Колчанов А. В., Меньшенин В. В., Мирсаев И. Ф., Николаев В. В. *Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков*. Москва: Физматлит, 2001.
33. Turov E. A., Nikolaev V. V. New physical phenomena caused by magnetoelectric and antiferroelectric interactions in magnets. *Physics-Uspekhi*. 2005. Vol. 48, No. 5, P. 431 –447.

34. Kurkin M.I., Leskovets V.V., Nikolaev V.V. et al. NMR excitation by an electric field as a dynamic manifestation of magnetoelectric and antiferroelectric interactions. *Phys. Solid State*. 2003. Vol. 45, P. 685–690.
35. Stevens K.W.H. Exchange interactions in magnetic insulators. *Physics Reports*. 1976. Vol. 24, No. 1, P. 1–75.
36. Дзялошинский И. Е. Термодинамическая теория «слабого» ферромагнетизма антиферромагнетиков. *ЖЭТФ*. 1957. Vol. 32, №6, С. 1547–1562.
37. Медведовская О. Г., Чепурных Г. К. Влияние взаимодействия Дзялошинского на ориентационные фазовые переходы в антиферромагнетиках. *Физика твердого тела*. 1985. Vol. 27, №3, С. 718–722.
38. Москвин А. С. Взаимодействие Дзялошинского и обменно-релятивистские эффекты в ортоферитах. *ЖЭТФ*. 2021. Vol. 159, №4, С. 607–643.
39. Завражная Е. М., Чепурных Г. К. Диаграмма состояний антиферромагнетика с преобладающим взаимодействием Дзялошинского. *Физика низких температур*. 2007. Vol. 33, № 1, С. 69–77.
40. Гуревич А. Г. *Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках*. Москва: изд-во «Наука», 1973.
41. Borovik–Romanov A. S., Prozorova L. A. Spin waves in antiferromagnetics. *Contemporary Physics*. 1978. Vol. 19, No. 4, P. 311–326.
42. Койрах Л. А., Преображенский В. Л. Переориентация магнитных моментов антиферромагнетика в поле звуковой волны. *Акустический журнал*. 1984. Vol. 25, №2, С. 230–232.
43. Tanner B. K. Antiferromagnetic domains. *Contemporary Physics*. 1979. Vol. 20, No. 2, P. 187–210.
44. Вонсовский С. В. *Магнетизм*. Москва: Наука, 1971, 1032 с.
45. Львов В. С. *Нелинейные спиновые волны*. Москва: Наука, 1987, 271 с.

46. Fert A., Chshiev M., Thiaville A., Yang H. From early theories of Dzyaloshinskii–Moriya interactions in metallic systems to today’s novel roads. *Journal of the Physical Society of Japan*. 2023. Vol. 92, No. 8, Article ID: 081001.
47. Yang H., Liang J., Cui Q. First–principles calculations for Dzyaloshinskii–Moriya interaction. *Nature Reviews Physics*. 2023. Vol. 5, No. 1, P. 43–61.
48. Hu C.D. Dzyaloshinskii–Moriya interaction in metals. *J. Phys.: Condens. Matter*. 2012. Vol. 24, 086001, 5. p.
49. Neusser S., Grundler D. Magnonics: Spin waves on the nanoscale. *Advanced materials*. 2009. Vol. 21, No. 28, P. 2927–2932.
50. Rezende S.M. *Fundamentals of magnonics*. Vol. 969. Cham: Springer, 2020.
51. Yu H., Xiao J., Schultheiss H. Magnetic texture based magnonics. *Physics Reports*. 2021. Vol. 905, P. 1–59.
52. Petti D., Tacchi S., Albisetti E. Review on magnonics with engineered spin textures. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2022. Vol. 55, No. 29, Article ID: 293003.
53. Barman A. et al. The 2021 magnonics roadmap. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2021. Vol. 33, No. 41, Article ID: 413001.
54. Vogt K., Fradin F., Pearson J. et al. Realization of a spin-wave multiplexer. *Nat. Commun*. 2014. Vol. 5, No. 1, Article ID: 3727.
55. Freeman M.R., Choi B. C. Advances in magnetic microscopy. *Science*. 2001. Vol. 294, No. 5546 P. 1484–1488.
56. Schneider T., Serga A.A., Leven B., Hillebrands B., Stamps R.L., Kostylev M. P. Realization of spin–wave logic gates. *Appl. Phys. Lett*. 2008. Vol. 92, Article ID: 022505.
57. Tao L.L., Naeemi A., Tsymbal E. Y. Valley–spin logic gates. *Physical Review Applied*. 2020. Vol. 13, No. 5, Article ID: 054043.

58. Mruczkiewicz M., Gruszecki P. The 2021 roadmap for noncollinear magnonics. *Solid State Physics*. 2021. Vol. 72, P. 1–27.
59. Kumar C.S. *Magnonic Devices Numerical Modelling and Micromagnetic Simulation Approach*. Cham: Springer, 2023.
60. Grundler D. Spintronics. *Phys. World*. 2002. Vol. 15, P. 39–43.
61. Tsymbal E. Y., Ćutić I. (Eds.). *Spintronics Handbook: Spin Transport and Magnetism: Volume Three: Nanoscale Spintronics and Applications*. CRC Press, 2019.
62. Товстоли́ткін О. І., Боровий М. О., Курилюк В. В., Куницький Ю. А. *Фізичні Основи Спінтроніки*, Вінниця: Нілан-ЛТД, 2014.
63. Ćutić I. et al. Spin–lasers: spintronics beyond magnetoresistance. *Solid State Communications*. 2020. Vol. 316, Article ID: 113949.
64. Kampfrath T., Sell A., Klatt G. et al. Coherent terahertz control of antiferromagnetic spin waves. *Nature Photon*. 2011. Vol. 5, No. 1, P. 31–34.
65. Nishimoto T., Moriyasu T., Kohmoto T. Ultrafast Phenomena XIX. *Proceedings of the 19th International Conference*, Okinawa Convention Center, Springer International Publishing, Okinawa, 2015.
66. Lebrun R., Ross A., Bender S. A. et al. Tunable long–distance spin transport in a crystalline antiferromagnetic iron oxide. *Nature*. 2018. Vol. 561, P. 222–225.
67. Li J., Wilson C. B., Cheng R. et al. Spin current from sub-terahertz-generated antiferromagnetic magnons. *Nature*. 2020. Vol. 578, P. 70–74.
68. Vaidya P., Morley S. A., van Tol J. et. al. Subterahertz spin pumping from an insulating antiferromagnet. *Science*. 2020. Vol. 368, No. 6487, P. 160–165.
69. Dąbrowski M., Nakano T., Burn D. M., Frisk A., Newman D. G., Klewe C., Q. Li et al. Coherent transfer of spin angular momentum by evanescent spin

- waves within antiferromagnetic NiO. *Physical review letters*. 2020. Vol. 124, No. 21, Article ID: 217201.
70. Hortensius J. R., Afanasiev D., Matthiesen M. et al. Coherent spin-wave transport in an antiferromagnet. *Nat. Phys.* 2021. Vol. 17, P. 1001–1006.
 71. Otxoa R. M., Atxitia U., Roy P. E. et al. Giant localised spin-Peltier effect due to ultrafast domain wall motion in antiferromagnetic metals. *Commun. Phys.* 2020. Vol. 3, No. 1, Article ID: 087203.
 72. Chumak A., Vasyuchka V., Serga A. et al. Magnon spintronics. *Nature. Phys.* 2015. Vol. 11, P. 453–461.
 73. Wang Q., Kewenig M., Schneider M. et al. A magnonic directional coupler for integrated magnonic half-adders. *Nat. Electron.* 2020. Vol. 3, P. 765–774.
 74. Dieny B., Prejbeanu I. L., Garello K. et al. Opportunities and challenges for spintronics in the microelectronics industry. *Nat. Electron.* 2020. Vol. 3, P. 446–459.
 75. Rezende S. M., Azevedo A., Rodríguez-Suárez R. L. Introduction to antiferromagnetic magnons, *J. Appl. Phys.* 2019. Vol. 126, Article ID: 151101.
 76. Duine R. An alternating alternative. *Nature Mater.* 2011. Vol. 10, P. 344–345.
 77. Zhang J. S., Zhang R. L., Hu Q., Fan R. H., Peng R. W. Tunable microwave multiband filters based on a waveguide with antiferromagnetic and dielectric sandwiches. *J. Appl. Phys.* 2011. Vol. 109, No. 7, Article ID: 07A305.
 78. Khymyn R., Lisenkov I., Tiberkevich V., Ivanov B. A., Slavin A. Antiferromagnetic THz-frequency Josephson-like Oscillator Driven by Spin Current. *Sci. Rep.* 2017. Vol. 7, Article ID: 43705.
 79. Troncoso R. E., Ulloa C., Pesce F., Nunez A. S. Antiferromagnetic magnonic crystals. *Phys. Rev. B.* 2015. **92**, Article ID: 224424.
 80. Hortensius J. R., Afanasiev D., Matthiesen M. et al. Coherent spin-wave transport in an antiferromagnet. *Nat. Phys.* 2021. Vol. 17, P. 1001–1006.

81. Mahmoud A., Ciubotaru F., Vanderveken F., Chumak A. V., Hamdioui S., Adelman C., Cotofana S. Introduction to spin wave computing. *J. Appl. Phys.* 2020. Vol. 128, Lan J., Yu W., Xiao J. Antiferromagnetic domain wall as spin wave polarizer and retarder. *Nat. Commun.* 2017. **8**, No. 1, Article ID: 161101.
82. Lan J., Yu W., Xiao J. Antiferromagnetic domain wall as spin wave polarizer and retarder. *Nat. Commun.* 2017. **8**, No. 1, Article ID: 178.
83. Ishibashi M., Shiota Y., Funada S., Moriyama T., Ono T. Spin Wave Resonance in Perpendicularly Magnetized Synthetic Antiferromagnets. *J. Magn. Soc. Japan.* 2021. Vol. 45, P. 25–29.
84. Jia C., Chen M., Schäffer A. F. et al. Chiral logic computing with twisted antiferromagnetic magnon modes. *npj Comput Mater.* 2021. Vol. 7, No. 1, Article ID: 101.
85. Cheng R., Daniels M. W., Zhu J. G., Xiao D. Antiferromagnetic Spin Wave Field–Effect Transistor. *Sci. Rep.* 2016. Vol. 6, No. 1, Article ID: 24223.
86. Liu T., Vignale G. Electric Control of Spin Currents and Spin–Wave Logic. *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106, Article ID: 247203.
87. Gallardo R. A., Alvarado–Seguel P., Landeros P. Unidirectional Chiral Magnonics in Cylindrical Synthetic Antiferromagnets. *Phys. Rev. Appl.* 2022. Vol. 18, Article ID: 054044.
88. Daniels M. W., Cheng R., Yu W., Xiao J., Xiao D. Nonabelian magnonics in antiferromagnets. *Phys. Rev. B.* 2018. Vol. 98, Article ID: 134450.
89. Cheng R., Xiao J., Niu Q., Brataas A. Spin Pumping and Spin–Transfer Torques in Antiferromagnets. *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 113, Article ID: 057601.
90. Daniels M. W., Guo W., Stocks G. M., Xiao D., Xiao J. Spin–transfer torque induced spin waves in antiferromagnetic insulators. *New J. Phys.* 2015. Vol. 17, Article ID: 103039.

91. Kanda N., Higuchi T., Shimizu H., Konishi K., Yoshioka K., Kuwata-Gonokami M. The vectorial control of magnetization by light. *Nat. Commun.* 2011. **2**, No. 1, Kanda N., Higuchi T., Shimizu H., Konishi K., Yoshioka K., Kuwata-Gonokami M. The vectorial control of magnetization by light. *Nat. Commun.* 2011. **2**, No. 1, Article ID: 362.
92. Kimel A., Kirilyuk A., Usachev P. et al. Ultrafast non-thermal control of magnetization by instantaneous photomagnetic pulses. *Nature*. 2005. Vol. 435, P. 655–657.
93. Satoh T., Cho S.-J., Iida R., Shimura T., Kuroda K., Ueda H., Ueda Y., Ivanov B. A., Nori F., Fiebig M. Spin Oscillations in Antiferromagnetic NiO Triggered by Circularly Polarized Light. *Phys. Rev. Lett.* 2010. Vol. 105, Article ID: 077402.
94. Hortensius J. R., Afanasiev D., Matthiesen M., Leenders R., Citro R., Kimel A. V., Mikhaylovskiy R. V., Ivanov B. A., Caviglia A. D. Coherent spin-wave transport in an antiferromagnet. *Nat. Phys.* 2021. Vol. 17, P. 1001–1006.
95. Máca F., Mašek J., Stelmakhovych O., Martí X., Reichlová H., Uhlířová K., Beran P., Wadley P., Novák V., Jungwirth T. Room-temperature antiferromagnetism in CuMnAs. *J. Magn. Magn. Mater.* 2012. Vol. 324, P. 1606–1612.
96. Zhang X., Zhou Y., Ezawa M. Antiferromagnetic Skyrmion: Stability, Creation and Manipulation. *Sci. Rep.* 2016. Vol. 6.
97. Juge R., Sisodia N., Larrañaga J. U. et al. Skyrmions in synthetic antiferromagnets and their nucleation via electrical current and ultra-fast laser illumination. *Nat. Commun.* 2022. Vol. 13, 4807.
98. Wang Z. K., Zhang V. L. et al. Nanostructured Magnonic Crystals with Size-Tunable Bandgaps. *ACS Nano*. 2010. Vol. 4, P. 643–648.
99. Adhikari A., Majumder S., Otani Y., Barman A. Active Control of Dipole-Exchange Coupled Magnon Modes in Nanoscale Bicomponent Magnonic Crystals. *ACS Appl. Nano Mater.* 2023. Vol. 6, P. 7166–7172.

100. Mamica S., Krawczyk M., Grundler D. Nonuniform Spin–Wave Softening in Two–Dimensional Magnonic Crystals as a Tool for Opening Omnidirectional Magnonic Band Gaps. *Phys. Rev. Applied*. 2019. Vol. 11, Article ID: 054011.
101. Chen Z., Ma F. Skyrmion based magnonic crystals. *J. Appl. Phys.* 2021. Vol. 130, No. 9, Article ID: 090901.
102. Kruglyak V. V., Gorobets O. Yu., Gorobets Yu. I., Kuchko A. N. Magnetization boundary conditions at a ferromagnetic interface of finite thickness. *J. Phys.: Condens. Matter*. 2014. Vol. 26, No. 40, Article ID: 406001.
103. Kruglyak V. V., Davies C. S., Tkachenko V. S., Gorobets O. Yu., Gorobets Yu. I., Kuchko A. N. Formation of the band spectrum of spin waves in 1D magnonic crystals with different types of interfacial boundary conditions. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2017. Vol. 50, Article ID: 094003.
104. Cochran J. F., Heinrich B. Boundary conditions for exchange–coupled magnetic slabs, *Phys. Rev. B*. 1992. Vol. 45, P. 13096–13099.
105. Rado G. T., Weertman J. R. Spin–wave resonance in a ferromagnetic metal. *J. Phys. Chem. Solids*. 1959. Vol. 11, P. 315–333.
106. Barnaś J. On the Hoffmann boundary conditions at the interface between two ferromagnets. *J. Magn. Magn. Mater.* 1991. Vol. 102, P. 319–322.
107. Mills D. L. Spin waves in ultrathin exchange-coupled ferromagnetic multilayers: The boundary condition at the interface. *Phys. Rev. B*. 1992. Vol. 45, P. 13100–13104.
108. Anastaziak B. et al. Origin of perpendicular magnetic anisotropy enhancement in Co/Ni bilayer due to plasma oxidation. *Phys. Status Solidi – Rapid Res. Lett.* 2022. Vol. 16, No. 2, Article ID: 2100450.
109. Kowacz M., Mazalski P., Sveklo I. et al. Strong interfacial Dzyaloshinskii–Moriya induced in Co due to contact with NiO. *Sci. Rep.* 2022. Vol. 12, Article ID: 12741.

110. Pylypovskyi O. V., Tomilo A. V., Sheka D. D., Fassbender J. , Makarov D. Boundary conditions for the Néel order parameter in a chiral anti-ferromagnetic slab. *Phys. Rev. B*. 2021. Vol. 103, Article ID: 134413.
111. Jena B. B., Kar A. et al. Magnetic coupling across the antiferromagnetic–antiferromagnetic interface. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2021. Vol. 54, Article ID: 325001.
112. Busel O., Gorobets O., Gorobets Yu. Boundary conditions at the interface of finite thickness between ferromagnetic and antiferromagnetic materials. *J. Magn. Magn. Mater.* 2018. Vol. 462, P. 226–229.
113. Busel O., Gorobets O., Gorobets Yu. Propagation of Spin Waves Through an Interface Between Ferromagnetic and Antiferromagnetic Materials. *J. Supercond. Nov. Magn.* 2019. Vol. 32, P. 3097–3102.
114. Bloch F., Bloch F. Zur theorie des austauschproblems und der remanenzerscheinung der ferromagnetika. *Z. Phys.* 1932. Vol. 74, 295–335.
115. Holstein T., Primakoff H. Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet. *Phys. Rev.* 1940. Vol. 58, P. 1098–1113.
116. Coey J.M.D. *Magnetism and Magnetic Materials (1st ed.)*. New York: Cambridge University Press, 2009.
117. Dyson F. J. General Theory of Spin–Wave Interactions. *Phys. Rev.* 1956. Vol. 102, No. 5, P. 1217–1230.
118. Brillouin L. *Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices (2nd edn)*. Mineola, New York: Dover Publications, 1953.
119. Sykes C. G., Adam J. D., Collins J. H. Magnetostatic wave propagation in a periodic structure. *Appl. Phys. Lett.* 1976. Vol. 29, P. 388–391.
120. John S. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 58, No. 23, P. 2486–2489.

121. Yablonovitch E. Inhibited spontaneous emission in solidstate physics and electronics. *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 58, P. 2059–2062.
122. Vasseur J. O., Dobrzynski L., Djafari-Rouhani B., Puzkarski H. Magnon band structure of periodic composites. *Phys. Rev. B.* 1996. Vol. 54, No. 2, P. 1043–1049.
123. Gulyaev Y. V., Nikitov A. A. Magnonic crystals and spin waves in periodic structures. *Dokl. Phys.* 2001. Vol. 46, No. 10, P. 687–689
124. Puzkarski H., Krawczyk M. Magnonic crystals — the magnetic counterpart of photonic crystals. *Solid State Phenom.* 2003. **94**, P. 125–134.
125. Umetsu R. Y., Fukamichi K., Sakuma A. Electrical and magnetic properties, and electronic structures of pseudo-gap-type antiferromagnetic L10-type MnPt alloys. *Materials transactions.* 2006. Vol. 47, No. 1, P. 2–10.
126. Umetsu R. Y., Sakuma A., Fukamichi K. Magnetic anisotropy energy of antiferromagnetic L1-type equiatomic Mn alloys. *Applied physics letters.* 2006. Vol. 89, No. 5, Article ID: 052504.
127. Alsaad A. Structural and Magnetic Properties of Mn-Based Diluted Magnetic Semiconductors and Alloys. *Physics Research International.* 2009. N0. 1, Article ID: 406095.
128. Vallejo-Fernandez G. and Meinert M. Recent developments on MnN for spintronic applications. 2021. *Magnetochemistry.* Vol. 7, No. 8.
129. Park I. J., Lee T., Das P., Debnath B., Carman G. P., Lake R. K. . Strain control of the Néel vector in Mn-based antiferromagnets. *Appl. Phys. Lett.* 2019. Vol. 114, No. 14, Article ID: 142403.
130. Baltz V., Manchon A., Tsoi M., Moriyama T., Ono T., Tserkovnyak Y. Antiferromagnetic spintronics. *Reviews of Modern Physics.* 2018. Vol. 90, No. 1, Article ID: 015005.
131. The Materials Project. <https://next-gen.materialsproject.org/materials/mp-11500/>

132. Uchishiba H. Antiferromagnetism of γ -phase manganese alloys containing Ni, Zn, Ga and Ge. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1971. Vol. 31, No. 2, P. 436–440.
133. Парселл Э. М. Электричество и магнетизм. Беркелевский курс физики. Том 2. пер. с англ./Э. Парселл, Москва: Наука, 1971.

ДОДАТКИ

Додаток А

Список умовних скорочень та позначень

АФМ — антиферомагнетик

ФМ — феромагнетик

$\vec{M}_k^{(i)}$ (i — номер АФМ, $i = 1, 2$, k — номер підґратки АФМ, $k = 1, 2$) — густина магнітного моменту k -ї підґратки для i -го АФМ

індекс i — вживається для АФМ з номером i , $i \in \{1, 2\}$

$$M_{0i} = \left(\left| \vec{M}_1^{(i)} \right| + \left| \vec{M}_2^{(i)} \right| \right) / 2$$

$\vec{M}^{(i)}$ — вектор намагніченості для i -го АФМ

$\vec{m}_i$ — безрозмірний вектор намагніченості

$\vec{L}^{(i)}$ — вектор антиферомагнетизму (вектор Нееля) для i -го АФМ

$L_z^{(i)}$ — вектор Нееля вздовж осі анізотропії Oz (для i -го АФМ)

$\vec{l}_i$ — безрозмірний вектор антиферомагнетизму (вектор Нееля)

l_{iz} — компонента безрозмірного вектору Нееля (антиферомагнетизму) вздовж осі анізотропії Oz для i -го АФМ

β_{ki} ($k = 1, 2$) — константи анізотропії для i -го АФМ

$\alpha_i > 0$, α'_i ($\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$) — неоднорідні обмінні константи

δ_i — константа енергії однорідного обміну

γ — гіромагнітне відношення

ВДМ — взаємодія Дзялошинського–Морії

$\vec{d}_i$ — вектор Дзялошинського–Морії

δ_0 — товщина перехідної області (інтерфейсу) між двома АФМ

$|a| \ll |b|$ — величина $|a|$ набагато менша за величину $|b|$

$\vec{H}_0$ — зовнішнє магнітне поле

$$\vec{h}_{0i} = \vec{H}_0 / (2M_{0i}), \text{ де } M_{0i} = \left(\left| \vec{M}_1^{(i)} \right| + \left| \vec{M}_2^{(i)} \right| \right) / 2$$

A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} — константи однорідного обміну між підґратками різних АФМ в інтерфейсі

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ — скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$

- $[\vec{a} \times \vec{b}]$ або $\vec{a} \times \vec{b}$ — векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$
 W_i — енергія i -го АФМ (з урахуванням взаємодії Дзялошинського–Морії)
 w_i — об'ємна густина енергії i -го АФМ
 W_S — енергія інтерфейсу
 w_S — поверхнева густина енергії інтерфейсу
 $w = w_1 + w_2 + w_S$ — повна густина магнітної енергії магнетонного кристалу
 $\vec{H}_{mi}^{ef}, \vec{H}_{li}^{ef}$ — ефективні поля для i -го АФМ
 $a_{mm}, a_{lm}, a_{ml}, a_{ll}$ — обмінні константи
 $\vec{h}_{mi}^{ef}, \vec{h}_{li}^{ef}$ — безрозмірні ефективні магнітні поля
 $\sim$ — позначає знак пропорційності
 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ — орти осей Ox, Oy та Oz відповідно
 (r, θ, φ) — сферичні координати
 $\theta_i = \theta_i(x, y, z, t) \in [-\pi, \pi], \varphi_i = \varphi_i(x, y, z, t) \in (-\infty, +\infty)$ — азимутальний та полярний кути векторів $\vec{L}^{(i)}$ відповідно
 $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ — вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є співнаправленими
 $\vec{a} \perp \vec{b}$ — вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є перпендикулярними
 $l_{0i} = \frac{c_i}{\omega_{0i}}$ — характерні довжини
 v_i — швидкість спінової хвилі для i -го АФМ
 $K(k)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду
 $\lambda_{SW} (\lambda_{SW}^{(i)})$ — довжина спінової хвилі (для i -го АФМ відповідно)

Додаток В

Виведення покомпонентної форми рівняння (2.8)

Підставляючи в рівняння (2.8) вирази для $\vec{l}_i$, $i = 1, 2$, у вигляді (2.4), і припустивши, що зовнішнє магнітне поле та вектор Дзялошинського–Морії для обох АФМ спрямовані уздовж осі магнітної анізотропії, так що

$$\vec{h}_{0i} = h_{0i} \vec{e}_z, \quad \vec{d}_i = d_i \vec{e}_z, \quad i = 1, 2,$$

отримуємо послідовні співвідношення

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} &= \frac{\partial h_{0i}}{\partial t} \vec{e}_z, \quad (\vec{l}_i \vec{h}_{0i}) = h_{0i} \vec{e}_z, \\ \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} &= \left(\cos \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \cos \varphi_i - \sin \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right) \vec{e}_x + \\ &\quad + \left(\cos \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \sin \varphi_i + \sin \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right) \vec{e}_y - \\ &\quad - \sin \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \vec{e}_z, \quad \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} = \left(\cos \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \right. \\ &\quad \left. - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 - \sin \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) \vec{e}_x + \\ &\quad + \left(\cos \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 + 2 \cos \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \right. \\ &\quad \left. - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 + \sin \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) \vec{e}_y + \\ &\quad + \left(-\cos \theta_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 - \sin \theta_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} \right) \vec{e}_z, \\ [\vec{h}_{0i} \times \vec{d}_i] &= 0, \quad [\vec{l}_i \times \vec{h}_{0i}] = h_{0i} \begin{pmatrix} \sin \theta_i \sin \varphi_i \\ -\sin \theta_i \cos \varphi_i \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} (\vec{h}_{0i} \vec{l}_i) \frac{\partial \vec{l}_i}{\partial t} &- \frac{1}{\delta_i} [\vec{l}_i \times \vec{h}_{0i}] (\vec{l}_i \vec{h}_{0i}) - \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial \vec{h}_{0i}}{\partial t} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h_{0i} \cos \theta_i \left(\frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\cos \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} - \sin \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\delta_i} h_{0i} \sin \theta_i \sin \varphi_i \right) \vec{e}_x + \\
&+ h_{0i} \cos \theta_i \left(\frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \left(\cos \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + \sin \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta_i} h_{0i} \sin \theta_i \cos \varphi_i \right) \vec{e}_y + \\
&+ \left(-h_{0i} \cos \theta_i \frac{4}{\gamma M_{0i} \delta_i} \sin \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} - \frac{2}{\gamma M_{0i} \delta_i} \frac{\partial h_{0i}}{\partial t} \right) \vec{e}_z, \\
&\frac{\partial l_{ix}}{\partial x_j} = \cos \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} - \sin \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t},
\end{aligned}$$

тут і надалі $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l_{ix}}{\partial x_j^2} &= \cos \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_j^2} - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \right)^2 - 2 \cos \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} - \\
&- \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)^2 - \sin \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j^2},
\end{aligned}$$

звідси одержуємо вираз оператора Лапласа для l_{ix} :

$$\begin{aligned}
\Delta l_{ix} &= \frac{\partial^2 l_{ix}}{\partial x_j^2} = \cos \theta_i \cos \varphi_i \Delta \theta_i - \\
&- \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 - 2 \cos \theta_i \sin \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \\
&- \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \sin \theta_i \sin \varphi_i \Delta \varphi_i,
\end{aligned}$$

аналогічно одержуємо формули

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l_{iy}}{\partial x_j} &= \cos \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + \sin \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}, \\
\frac{\partial^2 l_{iy}}{\partial x_j^2} &= \cos \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_j^2} - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \right)^2 + 2 \cos \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} - \\
&- \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)^2 + \sin \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j^2}, \\
\Delta l_{iy} &= \frac{\partial^2 l_{iy}}{\partial x_j^2} = \cos \theta_i \sin \varphi_i \Delta \theta_i - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \cos \theta_i \cos \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \\
& - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 + \sin \theta_i \cos \varphi_i \Delta \varphi_i, \\
\frac{\partial l_{iz}}{\partial x_j} &= -\sin \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 l_{iz}}{\partial x_j^2} = -\cos \theta_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \right)^2 - \sin \theta_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_j^2}, \\
\Delta l_{iz} &= -\cos \theta_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 - \sin \theta_i \Delta \theta_i, \\
\left[\vec{l}_i \times \Delta \vec{l}_i \right] &= \begin{pmatrix} l_{iy} \Delta l_{iz} - l_{iz} \Delta l_{iy} \\ l_{iz} \Delta l_{ix} - l_{ix} \Delta l_{iz} \\ l_{ix} \Delta l_{iy} - l_{iy} \Delta l_{ix} \end{pmatrix}, \quad \left[\vec{l}_i \times \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right] = \begin{pmatrix} l_{iy} \frac{\partial^2 l_{iz}}{\partial t^2} - l_{iz} \frac{\partial^2 l_{iy}}{\partial t^2} \\ l_{iz} \frac{\partial^2 l_{ix}}{\partial t^2} - l_{ix} \frac{\partial^2 l_{iz}}{\partial t^2} \\ l_{ix} \frac{\partial^2 l_{iy}}{\partial t^2} - l_{iy} \frac{\partial^2 l_{ix}}{\partial t^2} \end{pmatrix}, \\
\left[\vec{l}_i \times \Delta \vec{l}_i \right] &= \vec{e}_x \left(\sin \theta_i \sin \varphi_i \left(-\cos \theta_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 - \sin \theta_i \Delta \theta_i \right) - \right. \\
& - \cos \theta_i \left(\cos \theta_i \sin \varphi_i \Delta \theta_i - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 + \right. \\
& + 2 \cos \theta_i \cos \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 + \sin \theta_i \cos \varphi_i \Delta \varphi_i \left. \right) + \\
& + \vec{e}_y \left(\cos \theta_i \left(\cos \theta_i \cos \varphi_i \Delta \theta_i - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 - 2 \cos \theta_i \sin \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \right. \right. \\
& - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \sin \theta_i \sin \varphi_i \Delta \varphi_i \left. \right) - \\
& - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(-\cos \theta_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 - \sin \theta_i \Delta \theta_i \right) \left. \right) + \\
& + \vec{e}_z \left(\sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\cos \theta_i \sin \varphi_i \Delta \theta_i - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 + \right. \right. \\
& + 2 \cos \theta_i \cos \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \\
& - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 + \sin \theta_i \cos \varphi_i \Delta \varphi_i \left. \right) - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\cos \theta_i \cos \varphi_i \Delta \theta_i - \right. \\
& - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 - 2 \cos \theta_i \sin \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \\
& - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \sin \theta_i \sin \varphi_i \Delta \varphi_i \left. \right).
\end{aligned}$$

З одержаних формул знаходимо координати для $\left[\vec{l}_i \times \Delta \vec{l}_i \right]$:

$$\left[\vec{l}_i \times \Delta \vec{l}_i \right]_x =$$

$$\begin{aligned}
&= \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(-\cos \theta_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 - \sin \theta_i \Delta \theta_i \right) - \cos \theta_i \left(\cos \theta_i \sin \varphi_i \Delta \theta_i - \right. \\
&\quad \left. - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 + 2 \cos \theta_i \cos \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \right. \\
&\quad \left. - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 + \sin \theta_i \cos \varphi_i \Delta \varphi_i \right) = \\
&= -\sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 - \sin^2 \theta_i \sin \varphi_i \Delta \theta_i - \cos^2 \theta_i \sin \varphi_i \Delta \theta_i + \\
&\quad + \sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 - 2 \cos^2 \theta_i \cos \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i + \\
&\quad + \sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \\
&\quad - \sin \theta_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \Delta \varphi_i = -\sin \varphi_i \Delta \theta_i - 2 \cos^2 \theta_i \cos \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i + \\
&\quad + \sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \sin \theta_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \Delta \varphi_i; \\
&\quad \left[\vec{l}_i \times \Delta \vec{l}_i \right]_y = \\
&= \cos \theta_i \left(\cos \theta_i \cos \varphi_i \Delta \theta_i - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 - 2 \cos \theta_i \sin \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \right. \\
&\quad \left. - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \sin \theta_i \sin \varphi_i \Delta \varphi_i \right) - \\
&\quad - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(-\cos \theta_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 - \sin \theta_i \Delta \theta_i \right) = \\
&= \cos^2 \theta_i \cos \varphi_i \Delta \theta_i - \sin \theta_i \cos \theta_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 - 2 \cos^2 \theta_i \sin \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \\
&\quad - \sin \theta_i \cos \theta_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \sin \theta_i \cos \theta_i \sin \varphi_i \Delta \varphi_i + \\
&\quad + \sin \theta_i \cos \theta_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 + \\
&\quad + \sin^2 \theta_i \cos \varphi_i \Delta \theta_i = \cos \varphi_i \Delta \theta_i - 2 \cos^2 \theta_i \sin \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \\
&\quad - \sin \theta_i \cos \theta_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \sin \theta_i \cos \theta_i \sin \varphi_i \Delta \varphi_i; \\
&\quad \left[\vec{l}_i \times \Delta \vec{l}_i \right]_z = \\
&= \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\cos \theta_i \sin \varphi_i \Delta \theta_i - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 + 2 \cos \theta_i \cos \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \right. \\
&\quad \left. - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 + \sin \theta_i \cos \varphi_i \Delta \varphi_i \right) - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\cos \theta_i \cos \varphi_i \Delta \theta_i - \right. \\
&\quad \left. - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 - 2 \cos \theta_i \sin \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sin \theta_i \sin \varphi_i \Delta \varphi_i) = \\
& = \sin \theta_i \cos \theta_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i \Delta \theta_i - \sin^2 \theta_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 + \\
& \quad + 2 \sin \theta_i \cos \theta_i \cos^2 \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \\
& \quad - \sin^2 \theta_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 + \sin^2 \theta_i \cos^2 \varphi_i \Delta \varphi_i - \\
& \quad - \sin \theta_i \cos \theta_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i \Delta \theta_i + \\
& \quad + \sin^2 \theta_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \theta_i \right)^2 + \\
& \quad + 2 \sin \theta_i \cos \theta_i \sin^2 \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i + \sin^2 \theta_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 + \\
& \quad + \sin^2 \theta_i \sin^2 \varphi_i \Delta \varphi_i = 2 \sin \theta_i \cos \theta_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i + \sin^2 \theta_i \Delta \varphi_i.
\end{aligned}$$

З одержаних формул для координат $\left[\vec{l}_i \times \Delta \vec{l}_i \right]$ маємо рівність

$$\begin{aligned}
& \left[\vec{l}_i \times \Delta \vec{l}_i \right] = \vec{e}_x \left(-\sin \varphi_i \Delta \theta_i - 2 \cos^2 \theta_i \cos \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i + \right. \\
& \quad \left. + \sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \sin \theta_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \Delta \varphi_i \right) + \\
& \quad \vec{e}_y \left(\cos \varphi_i \Delta \theta_i - 2 \cos^2 \theta_i \sin \varphi_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i - \sin \theta_i \cos \theta_i \cos \varphi_i \left(\vec{\nabla} \varphi_i \right)^2 - \right. \\
& \quad \left. - \sin \theta_i \cos \theta_i \sin \varphi_i \Delta \varphi_i \right) + \vec{e}_z \left(2 \sin \theta_i \cos \theta_i \vec{\nabla} \theta_i \vec{\nabla} \varphi_i + \sin^2 \theta_i \Delta \varphi_i \right), \\
& \left[\vec{l}_i \times \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right] = \left(\sin \theta_i \sin \varphi_i \left(-\cos \theta_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 - \sin \theta_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} \right) - \right. \\
& \quad - \cos \theta_i \left(\cos \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 + 2 \cos \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \right. \\
& \quad \left. \left. - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 + \sin \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) \right) \vec{e}_x + \\
& \quad + \left(\cos \theta_i \left(\cos \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 - 2 \cos \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \sin \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(-\cos \theta_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 - \sin \theta_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} \right) \right) \vec{e}_y +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\cos \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - \right. \right. \\
& - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 + 2 \cos \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \\
& - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 + \sin \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \left. \right) - \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\cos \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - \right. \\
& - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 - 2 \cos \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 - \\
& \left. \left. - \sin \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) \right) \vec{e}_z.
\end{aligned}$$

За допомогою одержаної формули спростимо компоненти вектора $\left[\vec{l}_i \times \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right]$:

$$\begin{aligned}
\left[\vec{l}_i \times \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right]_x &= -\sin \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - \\
& - 2 \cos^2 \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 - \sin \theta_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2}, \\
\left[\vec{l}_i \times \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right]_y &= \cos \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - 2 \cos^2 \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \\
& - \sin \theta_i \cos \theta_i \cos \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 - \sin \theta_i \cos \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2}, \\
\left[\vec{l}_i \times \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right]_z &= 2 \sin \theta_i \cos \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sin^2 \theta_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

Враховуючи одержані формули компонент вектора $\left[\vec{l}_i \times \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right]$, приходимо до формули для $\left[\vec{l}_i \times \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right]$:

$$\begin{aligned}
\left[\vec{l}_i \times \frac{\partial^2 \vec{l}_i}{\partial t^2} \right] &= \left(-\sin \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - \right. \\
& - 2 \cos^2 \theta_i \cos \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 - \\
& \left. - \sin \theta_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - \right) \vec{e}_x +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\cos \varphi_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - 2 \cos^2 \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \sin \theta_i \cos \theta_i \cos \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 - \right. \\
& \left. - \sin \theta_i \cos \theta_i \sin \varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) \vec{e}_y + \left(2 \sin \theta_i \cos \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sin^2 \theta_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) \vec{e}_z.
\end{aligned}$$

Продовжуючи здійснювати необхідні обрахунки, одержуємо:

$$\begin{aligned}
(\vec{l}_i \vec{d}_i) [\vec{d}_i \times \vec{l}_i] &= d_i^2 \cos \theta_i \begin{pmatrix} -\sin \theta_i \sin \varphi_i \\ \sin \theta_i \cos \varphi_i \\ 0 \end{pmatrix}, \\
l_{iz} [\vec{l}_i \times \vec{e}_z] &= \cos \theta_i \begin{pmatrix} \sin \theta_i \sin \varphi_i \\ -\sin \theta_i \cos \varphi_i \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Враховуючи знайдені вирази, одержуємо, що рівняння (2.8) у покомпонентному вигляді (проекції на осі Ox , Oy , Oz відповідно) для кожного АФМ, $i \in \{1, 2\}$, набуває вигляду системи (2.9).

Додаток С

Аналітичні розв'язки системи рівнянь Ландау-Ліфшиця, які описують нелінійні спінові хвилі в антиферомагнітному магнетному кристалі

Запишемо автомодельний розв'язок рівняння (2.15) для спінової хвилі, що розповсюджується зі швидкістю v уздовж осі Oz . Для цього спочатку представимо розв'язок для кута φ_L у вигляді $\varphi_L(\vec{r}, t) = \int \omega_H dt + \tilde{\varphi}_L(x, y, z)$. Після цього ми можемо записати автомодельний розв'язок в наступному вигляді:

$$\begin{cases} \theta_L(\vec{r}, t) = \theta_L(x, y, z - v_i t), \\ \varphi_L(\vec{r}, t) = \omega_{Hi} t + \tilde{\varphi}_L(x, y, z - v_i t), \end{cases} \quad (2.58)$$

де $\omega_H = \gamma|H_0|$ (для випадку змінного з часом $\vec{H}_0$ ми маємо замінити величину $\omega_H t$ на $\int \omega_H dt$). Як можна бачити з (2.58), для такого розв'язку похідну по часу можна замінити на похідну по координаті z : $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -v \frac{\partial}{\partial z}$. Після такої заміни отримуємо

$$\begin{cases} c_i^2 \Delta \theta_L - v_i^2 \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial t^2} + \\ \left(v_i^2 \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial t} \right)^2 - c_i^2 \left(\vec{\nabla} \tilde{\varphi}_L \right)^2 - \omega_{0i}^2 \operatorname{sgn} \beta_1 \right) \sin \theta_L \cos \theta_L = 0, \\ c_i^2 \operatorname{div} \left(\sin^2 \theta_L \vec{\nabla} \tilde{\varphi}_L \right) = -v_i \frac{\partial}{\partial z} \left(\sin^2 \theta_L \left(-v_i \frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial z} \right) \right). \end{cases} \quad (2.59)$$

Перетворимо цю систему до більш симетричного вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{v_i^2}{c_i^2} \right) \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial z^2} - \\ - \left(\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial y} \right)^2 + \left(1 - \frac{v_i^2}{c_i^2} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial z} \right)^2 + \frac{\omega_{0i}^2}{c_i^2} \operatorname{sgn} \beta_1 \right) \sin \theta_L \cos \theta_L = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sin^2 \theta_L \frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sin^2 \theta_L \frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial y} \right) + \left(1 - \frac{v_i^2}{c_i^2} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\sin^2 \theta_L \frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial z} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.60)$$

Така система рівнянь містить просторові та часові похідні тільки у Лоренц-інваріантних комбінаціях, причому роль швидкості світла грає введена вище характерна швидкість c . Отже, для випадку $v < c$ використаємо перетворення простору, подібне до релятивістського перетворення Лоренца,

для розв'язку (2.60). Оскільки на відміну від релятивістської теорії швидкість спінової може перевищувати «світлову» швидкість c , розглянемо також «надсвітловий» випадок $v > c$ з відповідними Лоренц-подібними перетвореннями простору. Окремо дослідимо випадок $v = c$.

Дослідимо спочатку випадок, коли швидкість спінової хвилі менша за характерну швидкість c , так що $v < c$. Для такого випадку застосуємо наступне Лоренц-подібне перетворення простору, вводячи нові координати (X_1, X_2, X_3) :

$$X_1 = x, X_2 = y, X_3 = \frac{z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.61)$$

Після застосування такої заміни система (2.60) перетворюється на відому систему для статичного розподілу вектора намагніченості у феромагнетику та вектора антиферомагнетизму у антиферомагнетику (див., наприклад, [27]):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial X_3^2} - \\ - \left(\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial X_3} \right)^2 + \frac{\omega_0^2}{c_i^2} \operatorname{sgn} \beta_1 \right) \sin \theta_L \cos \theta_L = 0, \\ \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\sin^2 \theta_L \frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial X_1} \right) + \frac{\partial}{\partial X_2} \left(\sin^2 \theta_L \frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial X_2} \right) + \frac{\partial}{\partial X_3} \left(\sin^2 \theta_L \frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial X_3} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.62)$$

Використаємо наступний розв'язок системи (2.62) (див., наприклад, [27]):

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \left(\frac{\theta_L}{2} \right) = H(P(X_1, X_2, X_3)), \\ \tilde{\varphi}_L = Q(P(X_1, X_2, X_3)), \end{cases} \quad (2.63)$$

де H, P, Q — деякі допустимі функції. Для перетворення системи (2.62), після заміни (2.61), запишемо наступні співвідношення, позначаючи, $H' = \frac{dH}{dP}$, $H'' = \frac{d^2 H}{dP^2}$ (при цьому, X_i розуміємо для кожного $i = 1, 2, 3$):

$$\sin \theta_L = \pm \frac{2H}{1 + H^2}, \quad (2.64)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta_L = \frac{1-H^2}{1+H^2}, \\ \frac{\partial \theta_L}{\partial X_i} = 2 \frac{1}{1+H^2} \frac{\partial H}{\partial X_i} = \frac{2H'}{1+H^2} \frac{\partial P}{\partial X_i}, \\ \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial X_i^2} = 2 \left(\frac{H''(1+H^2) - 2H'H H'}{(1+H^2)^2} \left(\frac{\partial P}{\partial X_i} \right)^2 + \frac{H'}{1+H^2} \frac{\partial^2 P}{\partial X_i^2} \right) = \\ = \frac{2}{1+H^2} \left(H' \frac{\partial^2 P}{\partial X_i^2} + \left(H'' - \frac{2H(H')^2}{1+H^2} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial X_i} \right)^2 \right), \\ \frac{\partial}{\partial X_i} \sin^2 \theta_L = 2 \left(\pm \frac{2H}{1+H^2} \right) \left(\frac{1-H^2}{1+H^2} \right) \frac{2H'}{1+H^2} \frac{\partial P}{\partial X_i} = \\ = \pm \frac{8H(1-H^2)H'}{(1+H^2)^3} \frac{\partial P}{\partial X_i}, \\ \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\sin^2 \theta_L \frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial X_i} \right) = \pm \frac{8H(1-H^2)H'}{(1+H^2)^3} \frac{\partial P}{\partial X_i} \frac{\partial Q}{\partial X_i} + \frac{4H^2}{(1+H^2)^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial X_i^2}. \end{array} \right. \quad (2.65)$$

Використовуючи ці співвідношення, можна переписати (2.62) наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{1+H^2} \left(H' \sum_i \frac{\partial^2 P}{\partial X_i^2} + \left(H'' - \frac{2H(H')^2}{1+H^2} \right) \sum_i \left(\frac{\partial P}{\partial X_i} \right)^2 \right) \pm \\ \pm \left(\sum_i \left(\frac{\partial Q}{\partial X_i} \right)^2 + \frac{\omega_0^2}{c_i^2} \operatorname{sgn} \beta_1 \right) \frac{2H(1-H^2)}{(1+H^2)^2} = 0, \\ \pm \frac{8H(1-H^2)H'}{(1+H^2)^3} \sum_i \frac{\partial P}{\partial X_i} \frac{\partial Q}{\partial X_i} + \frac{4H^2}{(1+H^2)^2} \sum_i \frac{\partial^2 Q}{\partial X_i^2} = 0. \end{array} \right. \quad (2.66)$$

Оберемо для зручності знак «+» у виразі (2.64) для $\sin \theta_L$ (всі аналогічні обчислення можуть бути пророблені для знаку «-»). Тоді система рівнянь (2.66) справджується, зокрема, при виконанні наступної системи умов для функції H, P і Q відповідно:

$$H'' - \frac{2H(H')^2}{1+H^2} - \frac{H(1-H^2)}{1+H^2} = 0, \quad (2.67)$$

$$\tilde{\Delta} P := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 P}{\partial X_i^2}, \quad \tilde{\Delta} Q = 0, \quad (2.68)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial P}{\partial X_i} \frac{\partial Q}{\partial X_i} = 0, \quad (2.69)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial P}{\partial X_i} \right)^2 = \sum_i \left(\frac{\partial Q}{\partial X_i} \right)^2 + \frac{\omega_0^2}{c_i^2} \operatorname{sgn} \beta_1, \quad (2.70)$$

(ми ввели у розгляд оператор $\tilde{\Delta} \equiv \sum_i \frac{\partial^2}{\partial X_i^2}$).

Вводимо нову функцію $K(H) = H'(P)$. Тоді рівняння (2.67) набуде вигляду

$$\frac{1}{2} (1 + H^2) \frac{d(K^2)}{dH} - 2HK^2 - H(1 - H^2) = 0.$$

Таке рівняння розв'язується стандартними методами, його розв'язок може бути зображений (у загальному випадку) у вигляді (див., наприклад, [27–29]):

$$P(H) = \pm \int \frac{dH}{\sqrt{H^2 + C(1 + H^2)^2}}, \quad (2.71)$$

де C — довільна дійсна стала.

Для $-\frac{1}{4} < C < 0$ розв'язок можна записати за допомогою еліптичної функції Якобі dn у вигляді:

$$H(P) = \frac{b}{\operatorname{dn}\left(a\sqrt{|C|}P(X_1, X_2, X_3), k_1\right)},$$

де

$$a = \sqrt{\frac{1 + 2C + \sqrt{1 + 4C}}{2|C|}}, \quad b = \sqrt{\frac{1 + 2C - \sqrt{1 + 4C}}{2|C|}},$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2\sqrt{1 + 4C}}{1 + 2C + \sqrt{1 + 4C}}},$$

так що

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_L}{2}\right) = \frac{b}{\operatorname{dn}\left(a\sqrt{|C|}P(X_1, X_2, X_3), k_1\right)}, \\ \varphi_L = \omega_H t + Q(X_1, X_2, X_3); \end{cases} \quad (2.72)$$

а для $C > 0$ у вигляді:

$$H(P) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sn}\left(\frac{P(X_1, X_2, X_3)}{k_2}, k_2\right)}{1 + \operatorname{sn}\left(\frac{P(X_1, X_2, X_3)}{k_2}, k_2\right)}},$$

де $k_2 = 1/\sqrt{1 + 4C}$.

Зауважуючи, що $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta_L}{2}\right) = \frac{1 - \cos \theta_L}{1 + \cos \theta_L}$, формулу розв'язку (2.72) можна перетворити до вигляду

$$\begin{cases} \cos \theta_L = \operatorname{sn}\left(\frac{P(X_1, X_2, X_3)}{k_2}, k_2\right), \\ \varphi_L = \omega_H t + Q(X_1, X_2, X_3). \end{cases} \quad (2.73)$$

Проаналізуємо тепер систему рівнянь (2.68)–(2.70) для функцій P , Q . Зважаючи на симетрію задачі, розіб'ємо умови (2.68)–(2.70) на симетричні умови по X_1 , X_2 та окрему умову по X_3 . Так, умова (2.69) виконується, зокрема, якщо функції P , Q задовольняють умову Коші–Рімана для функцій P , Q (відповідно дійсної та уявної частин комплекснозначної функції $P + iQ$ у площині (X_1, X_2)), причому одна з цих двох функцій (Q при $\beta_1 > 0$, P при $\beta_1 < 0$) не залежить від X_3 . Таким чином, друга функція (в даному випадку P) залежить від X_3 лінійно, так що з (2.70) при $\beta_1 > 0$, одержуємо

$$P = \frac{\omega_0}{c} X_3 + p(X_1, X_2), \quad Q = Q(X_1, X_2), \quad (2.74)$$

де $p(X_1, X_2)$ — деяка допустима функція двох змінних. Умови Коші–Рімана для, записаної таким чином функції P

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial X_1} = -\frac{\partial Q}{\partial X_2}, \\ \frac{\partial P}{\partial X_2} = \frac{\partial Q}{\partial X_1}, \end{cases}, \quad (2.75)$$

набудуть вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial X_1} = -\frac{\partial Q}{\partial X_2}, \\ \frac{\partial p}{\partial X_2} = \frac{\partial Q}{\partial X_1}. \end{cases} \quad (2.76)$$

При $\beta_1 < 0$, відповідно:

$$Q = \frac{\omega_0}{c} X_3 + q(X_1, X_2), \quad P = P(X_1, X_2),$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial X_1} = -\frac{\partial q}{\partial X_2}, \\ \frac{\partial P}{\partial X_2} = \frac{\partial q}{\partial X_1}. \end{cases}$$

Таким умовам відповідає, наприклад, розв'язок вигляду

$$\begin{cases} P = \frac{\pm X_3}{l_0} \Theta(\beta_1) + \sum_i n_i \ln(|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|) + \frac{2k}{\pi} K(k) \sum_i \tilde{n}_i \alpha_i + C_2, \\ Q = \frac{\pm X_3}{l_0} \Theta(-\beta_1) - \frac{2k}{\pi} K(k) \sum_i \tilde{n}_i \ln(|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|) + \sum_i \alpha_i n_i + C_3, \end{cases} \quad (2.77)$$

де $\vec{r} = \frac{1}{l_0} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ — безрозмірний радіус-вектор точки у площині (тут

і надалі $X = x/l_0$, $Y = y/l_0$), $\vec{r}_{0i} = \frac{1}{l_{0i}} \begin{pmatrix} x_{0i} \\ y_{0i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{0i} \\ Y_{0i} \end{pmatrix}$ — безрозмірні площинні радіус-вектори деякого набору точок, n_i та $\tilde{n}_i$ — довільні цілі числа, α_i — азимутальний кут відносно точки $\vec{r}_{0i}$, так що

$$\alpha_i = \arctg \left(\frac{y - y_{0i}}{x - x_{0i}} \right) = \arctg \left(\frac{Y - Y_{0i}}{X - X_{0i}} \right),$$

функції

$$\Theta(\xi) = \begin{cases} 0, \xi \leq 0, \\ 1, \xi > 0, \end{cases}$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}$$

(повний еліптичний інтеграл першого роду), тут $k := k_i$, $i = 1, 2$. Враховуючи заміну $z \rightarrow z - v_i t$ у формулах (2.58), одержуємо їх перетворений вигляд

$$\begin{cases} \theta_L(\vec{r}, t) = \theta_L(X, Y, Z_i), \\ \varphi_L(\vec{r}, t) = \omega_H t + \tilde{\varphi}_L(X, Y, Z_i), \end{cases}$$

де $X = x$, $Y = y$, $Z = z - vt$. Тоді розв'язок (2.77) набуває вигляду

$$\begin{cases} P = \pm Z \Theta(\beta_1) + \sum_i n_i \ln(|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|) + \frac{2k}{\pi} K(k) \sum_i \tilde{n}_i \alpha_i + C_2, \\ Q = \pm Z \Theta(-\beta_1) - \frac{2k}{\pi} K(k) \sum_i \tilde{n}_i \ln(|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|) + \sum_i \alpha_i n_i + C_3. \end{cases} \quad (2.78)$$

Розглянемо тепер випадок, коли швидкість спінової хвилі більша за характерну швидкість c , так що $v > c$. Для такого випадку ми маємо застосувати «надсвітлове» Лоренц-подібне перетворення простору, так що вирази переходу до нових координат (X_1, X_2, X_3) матимуть наступний вигляд:

$$X_1 = x, \quad X_2 = y, \quad X_3 = \frac{z}{\sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}}. \quad (2.79)$$

Після застосування такої заміни система (2.60) приймає вигляд, дещо

відмінний від отриманого для випадку $v < c$ у (2.62) (див. [27]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial X_2^2} - \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial X_3^2} + \\ + \left(\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial X_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial X_3} \right)^2 + \frac{\omega_0^2}{c_i^2} \operatorname{sgn} \beta_1 \right) \sin \theta_L \cos \theta_L = 0, \\ \frac{\partial}{\partial X_3} \left(\sin^2 \theta_L \frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial X_3} \right) - \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\sin^2 \theta_L \frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial X_1} \right) - \frac{\partial}{\partial X_2} \left(\sin^2 \theta_L \frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial X_2} \right) + = 0. \end{array} \right. \quad (2.80)$$

Проте, така відмінність, як можна бачити, присутня лише у знаках відповідних доданків.

Запишемо для системи (2.80) розв'язок (2.63). Оскільки при виведенні співвідношень (2.64), (2.65) не використовується точний вигляд перетворень простору (2.61), ці співвідношення будуть вірними і для досліджуваного випадку (2.79). Отже, підставляючи розв'язок (2.63) у (2.80) та використовуючи (2.64), (2.65), отримуємо систему, аналогічну до (2.66):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{1+H^2} \left(H' \left(\frac{\partial^2 P}{\partial X_3^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial X_2^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial X_1^2} \right) + \right. \\ \left. + \left(H'' - \frac{2H(H')^2}{1+H^2} \right) \left(\left(\frac{\partial P}{\partial X_3} \right)^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial X_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial X_1} \right)^2 \right) \right) \pm \\ \pm \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial X_3} \right)^2 - \left(\frac{\partial Q}{\partial X_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial Q}{\partial X_1} \right)^2 + \frac{\omega_0^2}{c^2} \right) \frac{2H(1-H^2)}{(1+H^2)^2} = 0, \\ \pm \frac{8H(1-H^2)H'}{(1+H^2)^3} \left(\frac{\partial P}{\partial X_3} \frac{\partial Q}{\partial X_3} - \frac{\partial P}{\partial X_2} \frac{\partial Q}{\partial X_2} - \frac{\partial P}{\partial X_1} \frac{\partial Q}{\partial X_1} \right) + \frac{4H^2}{(1+H^2)^2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial X_3^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial X_2^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial X_1^2} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Оберемо, як і в попередньому випадку, знак «+» у виразі (2.64) $\sin \theta_L$ та запишемо аналогічну систему рівнянь для функцій H , P , Q . Як можна бачити, рівняння для H буде таким же, як і в попередньому випадку:

$$H'' - \frac{2H(H')^2}{1+H^2} - \frac{H(1-H^2)}{1+H^2} = 0,$$

так що можемо використовувати для нього розв'язки (2.71), (2.72), (2.73). Що стосується умов на функції P та Q , вони, як і рівняння (2.80), відрізняються від відповідних умов попереднього параграфу (2.68)–(2.70) тільки знаками відповідних доданків:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial X_3^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial X_2^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial X_1^2} &= 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial X_3^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial X_2^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial X_1^2} = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial X_3} \frac{\partial Q}{\partial X_3} - \frac{\partial P}{\partial X_2} \frac{\partial Q}{\partial X_2} - \frac{\partial P}{\partial X_1} \frac{\partial Q}{\partial X_1} &= 0, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial X_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial X_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial X_1}\right)^2 = -\frac{\omega_0^2}{c_i^2} \operatorname{sgn} \beta_1 + \left(\frac{\partial Q}{\partial X_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial X_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial X_1}\right)^2.$$

В цьому випадку, навпаки, при $\beta_1 > 0$ з двох функцій P та Q функція P не залежить від X_3 — а функція Q , відповідно, залежить лінійно. Розглядаємо допустиму функцію двох змінних $q(X_1, X_2)$, так, що функція Q відповідно перепишеться у вигляді

$$Q = \frac{\omega_0}{c_i} X_3 + q(X_1, X_2), \quad P = P(X_1, X_2),$$

далі, записуючи умови Коші–Рімана (2.75) для функцій P та Q по аналогії з попереднім випадком, отримуємо наступну систему рівнянь для функцій P і q :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial X_1} = -\frac{\partial q}{\partial X_2}, \\ \frac{\partial P}{\partial X_2} = \frac{\partial q}{\partial X_1}. \end{cases}$$

Відповідно, при $\beta_1 < 0$, маємо

$$P = \frac{\omega_0}{c_i} X_3 + p(X_1, X_2), \quad Q = Q(X_1, X_2),$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial X_1} = -\frac{\partial Q}{\partial X_2}, \\ \frac{\partial p}{\partial X_2} = \frac{\partial Q}{\partial X_1}. \end{cases}$$

Таким умовам відповідає, наприклад, розв'язок вигляду (2.78) після заміни $\beta_1 \rightarrow -\beta_1$, тобто

$$\begin{cases} P = \pm Z \Theta(-\beta_1) + \sum_i n_i \ln(|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|) + \frac{2k}{\pi} K(k) \sum_i \tilde{n}_i \alpha_i + C_2, \\ Q = \pm Z \Theta(\beta_1) - \frac{2k}{\pi} K(k) \sum_i \tilde{n}_i \ln(|\vec{r} - \vec{r}_{0i}|) + \sum_i \alpha_i n_i + C_3. \end{cases}$$

Зокрема, при наявності тільки однієї особливої точки з $|\vec{r}_{01}| = 0$ при $\tilde{n}_1 = 0$ отримані розв'язки спрощуються до вигляду

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_L}{2}\right) = \frac{b}{\operatorname{dn}(a\sqrt{|C|}P(X, Y, Z), k_1)}, \\ \varphi_L = \omega_H t + Q(X, Y, Z), \end{cases}$$

де

$$a = \sqrt{\frac{1 + 2C + \sqrt{1 + 4C}}{2|C|}}, \quad b = \sqrt{\frac{1 + 2C - \sqrt{1 + 4C}}{2|C|}},$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2\sqrt{1+4C}}{1+2C+\sqrt{1+4C}}},$$

при $-1/4 < C < 0$;

$$\begin{cases} \cos \theta_L = \operatorname{sn} \left(\frac{P(X,Y,Z)}{k_2}, k_2 \right), \\ \varphi_L = \omega_H t + Q(X,Y,Z), \end{cases} \quad k_2 = \frac{1}{\sqrt{1+4C}}$$

при $C > 0$, $X = x/l_0$, $Y = y/l_0$ та

$$\begin{cases} P = \pm Z_i \Theta(\beta_1) + n \ln(|\vec{r}|) + C_2, \\ Q = \pm Z_i \Theta(-\beta_1) + n\alpha + C_3, \end{cases} \quad Z_i = \frac{z - v_i t}{\sqrt{1 - v_i^2/c_i^2}},$$

при $v_i < c_i$, та

$$\begin{cases} P = \pm Z_i \Theta(-\beta_1) + n \ln(|\vec{r}|) + C_2, \\ Q = \pm Z_i \Theta(\beta_1) + n\alpha + C_3, \end{cases} \quad Z_i = \frac{z_i - v_i t}{\sqrt{v_i^2/c_i^2 - 1}},$$

при $v_i > c_i$.

Переходячи від одного АФМ до досліджуваної системи з двома АФМ, замінюючи $\beta_1 \rightarrow \beta_{ii} + d_i^2/\delta_i$, додаючи необхідні нижні індекси i , та обираючи знак плюс, маємо для розв'язку при $C > 0$:

$$\begin{cases} \cos \theta_i = \operatorname{sn} \left(\frac{Z_i + n_i \ln(|\vec{r}_i|) + C_{2i}}{k_{2i}}, k_{2i} \right), \\ \varphi_i = \omega_{H_i} t + n_i \alpha_i + C_{3i}, \end{cases}$$

де одночасно $\beta_{ii} + d_i^2/\delta_i < 0$, $v_i < c_i$ або $\beta_{ii} + d_i^2/\delta_i > 0$, $v_i > c_i$.

Зокрема, за відсутності зовнішнього магнітного поля $H_0 = 0$ при $n_i = 1$, $C_{3i} = \pi/2$ (для обох АФМ), після перепозначення $R_i = \exp\{-C_{2i}\}$ зазначений розв'язок набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} \cos \theta_i = \operatorname{sn} \left(\frac{Z_i + \ln \frac{|\vec{r}_i|}{R_i}}{k_{2i}}, k_{2i} \right), \\ \varphi_i = \alpha_i + \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

Зауважимо, що стала k_1 у наведений вище розв'язок не входить, тому для зручності запису перепозначимо $k_{2i} \rightarrow k_i$. Одержуємо розв'язок вигляду

$$\begin{cases} \cos \theta_i = \operatorname{sn} \left(\frac{Z_i + \ln \frac{|\vec{r}_i|}{R_i}}{k_i}, k_i \right), \\ \varphi_i = \alpha_i + \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (k_i > 0).$$

Додаток D

Параметри матеріалів

Візьмемо параметри: $L = 50$ нм, $d_i = 0$, $\gamma = 2\mu_0/\hbar = 1.759 \cdot 10^7$ Гс $^{-1}$ с $^{-1}$. Оцінимо обмінний інтеграл (див., наприклад, [125]) $J \approx 3k_B T_N/2$ та обмінну сталу $\alpha \approx ja^5/2(\mu_0)^2$. Звідси, маємо: $\alpha \approx (3k_B T_N/2)(a^5/2(\mu_0)^2)$, універсальна обмінна стала (див., наприклад, [126]) $\delta \approx J/(\mu_0 M_0)$, $M_0 \approx \mu_0/a^3$, $\mu_0 = 9.274 \cdot 10^{-21}$ ерг/Гс є магнетоном Бора, $k_B = 1.380310^{-16}$ ерг/К є сталою Больцмана, $\hbar = 1.0546 \cdot 10^{-27}$ ерг $\cdot$ с — приведена стала Планка, a — стала решітки, T_N — температура Нееля (співвідношення між наведеними величинами у системі СГС та у міжнародній системі СІ можна знайти, наприклад, в монографії [133]).

АФМ	K_{eff} , Дж/м 3 (ерг/см 3),	a , нм	T_N , К
MnN	$2,4 \cdot 10^4$ ($2,4 \cdot 10^5$) [127]	0.430 – 0.438 [128]	650 [129]; 660 [130]
MnIr	$-2.077 \cdot 10^7$ ($-2.077 \cdot 10^8$) [127]	0.364; 0.384 [23]	690; 1150 [4]
MnPt	$1.39 \cdot 10^6$ ($1.39 \cdot 10^7$) [126]	0.371; 0.398 [23]	970 [4]
MnNi	$-0.97 \cdot 10^6$ ($-0.97 \cdot 10^7$) [127]	0.293; 0.289 [131]	400 [132]

З огляду на співвідношення $\beta \approx K_{eff}/2M_0^2$; $\alpha \approx (3k_B T_N/2)(a^5/2(\mu_0)^2)$ см 2 [125, 126, 131]; $\delta \approx (3k_B T_N/2)/\mu_0 M_0$ [126]; $M_0 \approx \mu_0/a^3$ [128], $l_0 = \sqrt{\alpha/|\beta|}$ нм; $c = (|\gamma|M_0/2)\sqrt{\alpha\delta}$ см/с, має місце таблиця:

АФМ	β	α	δ	M_0	l_0	c
MnN	8.8	$2.9 \cdot 10^{-11}$	$1.2 \cdot 10^5$	117	18	$1.9 \cdot 10^6$
MnIr	-2813	$1.3 \cdot 10^{-11}$	$8 \cdot 10^4$	192	0.69	$1,7 \cdot 10^6$
MnPt	211	$2.1 \cdot 10^{-11}$	$1.2 \cdot 10^5$	182	3.1	$2.5 \cdot 10^6$
MnNi	-35.7	$2.6 \cdot 10^{-12}$	$2.4 \cdot 10^4$	369	2.69	$8.1 \cdot 10^5$

Комбінація MnN (1), MnPt (2)

$$\begin{aligned}
 c_{12}^2 &= c_1^2/c_2^2 = 0,6, \quad c_{12} \approx 0,78 \\
 L_{01}^2 &= L^2/l_{01}^2 = 7.7, \quad L_{01} \approx 2,8 \quad (L = 50 \text{ нм}) \\
 L_{01}^2 &= L^2/l_{01}^2 = 191.6, \quad L_{01} \approx 13,8 \quad (L = 250 \text{ нм}) \\
 L_{02}^2 &= L^2/l_{02}^2 = 257.3, \quad L_{02} \approx 16,0 \quad (L = 50 \text{ нм}) \\
 L_{02}^2 &= L^2/l_{02}^2 = 6433, \quad L_{02} \approx 80,2 \quad (L = 250 \text{ нм}) \\
 l_{12}^2 &= l_{01}^2/l_{02}^2 = 33.6, \quad l_{12} \approx 5,8
 \end{aligned}$$

Комбінація MnN (1), MnIr (2)

$$\begin{aligned}
 c_{12}^2 &= c_1^2/c_2^2 = 1.23, \quad c_{12} \approx 1,11 \\
 L_{01}^2 &= L^2/l_{01}^2 = 7.7, \quad L_{01} \approx 2,8 \quad (L = 50 \text{ нм}) \\
 L_{01}^2 &= L^2/l_{01}^2 = 191.6, \quad L_{01} \approx 13,8 \quad (L = 250 \text{ нм}) \\
 L_{02}^2 &= L^2/l_{02}^2 = 5287.6, \quad L_{02} \approx 72,7 \quad (L = 50 \text{ нм}) \\
 L_{02}^2 &= L^2/l_{02}^2 = 132190, \quad L_{02} \approx 363,6 \quad (L = 250 \text{ нм}) \\
 l_{12}^2 &= l_{01}^2/l_{02}^2 = 689.7, \quad l_{12} \approx 26,2
 \end{aligned}$$

Комбінація MnPt (1), MnIr (2)

$$\begin{aligned}
 c_{12}^2 &= c_1^2/c_2^2 = 2.04, \quad c_{12} \approx 1,43 \\
 L_{01}^2 &= L^2/l_{01}^2 = 257,3, \quad L_{01} \approx 16,0 \quad (L = 50 \text{ нм}) \\
 L_{01}^2 &= L^2/l_{01}^2 = 6433, \quad L_{01} \approx 80,2 \quad (L = 250 \text{ нм}) \\
 L_{02}^2 &= L^2/l_{02}^2 = 5287.6, \quad L_{02} \approx 72,7 \quad (L = 50 \text{ нм}) \\
 L_{02}^2 &= L^2/l_{02}^2 = 132190, \quad L_{02} \approx 363,6 \quad (L = 250 \text{ нм}) \\
 l_{12}^2 &= l_{01}^2/l_{02}^2 = 20.5, \quad l_{12} \approx 4,5
 \end{aligned}$$

Комбінація MnNi (1), MnIr (2)

$$\begin{aligned}
 c_{12}^2 &= c_1^2/c_2^2 = 0.217, \quad c_{12} \approx 0,47 \\
 L_{01}^2 &= L^2/l_{01}^2 = 343,3, \quad L_{01} \approx 18,5 \quad (L = 50 \text{ нм}) \\
 L_{01}^2 &= L^2/l_{01}^2 = 8582, \quad L_{01} \approx 92,6 \quad (L = 250 \text{ нм}) \\
 L_{02}^2 &= L^2/l_{02}^2 = 5287.6, \quad L_{02} \approx 72,7 \quad (L = 50 \text{ нм}) \\
 L_{02}^2 &= L^2/l_{02}^2 = 132190, \quad L_{02} \approx 363,6 \quad (L = 250 \text{ нм}) \\
 l_{12}^2 &= l_{01}^2/l_{02}^2 = 15.4, \quad l_{12} \approx 3,92
 \end{aligned}$$

Додаток Е

**Код програми на мові Python для графічної інтерпретації
спектрів швидкостей нелінійних спінових хвиль**

```

# Імпорт необхідних бібліотек
import matplotlib
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import special

# Визначаємо параметри матеріалу MnN/MnPt у докритичному ре-
жисмі
material = 'Material parameters for MnN/MnPt - 1st case (subcritical
in both AFMs)  $v_1 < c_1, v_2 < c_2$ :'

# Фізичні параметри середовища
L_01 = 2.78 L_02 = 16.13 l_12 = L_02/L_01 c_12 = 0.76

# Діапазон значень хвильового числа k
k_min = 0.1 k_max = 0.9

# Функція для обрахунку  $D_1$  за формулою:
#  $D_1 = (f^2 * c_{12}^2) + (1 - c_{12}^2) * (L_{02}^2 - L_{01}^2 * c_{12}^2)$ 

def D1_2(f_in, c_12_in = c_12, L_01_in = L_01, L_02_in = L_02):

     $D_1 = (f\_in ** 2) * (c\_12\_in ** 2) +$ 
     $+(1 - c\_12\_in ** 2) * (L\_02\_in ** 2 - (L\_01\_in ** 2) * (c\_12\_in ** 2))$ 

    return D1

# Символ  $a ** b$  означає піднесення числа a до степеня b
# Функція для обрахунку  $D_2$  за формулою:
#  $D_2 = f^2 * c_{12}^{-2} + (1 - c_{12}^{-2}) * (L_{01}^2 - L_{02}^2 * c_{12}^{-2})$ 

def D2_2(f_in, c_12_in = c_12, L_01_in = L_01, L_02_in = L_02):

     $D_2 = (f\_in ** 2) * (c\_12\_in ** (-2)) +$ 
     $+(1 - c\_12\_in ** (-2)) * (L\_01\_in ** 2 - (L\_02\_in ** 2) * (c\_12\_in ** (-2)))$ 

    return D2

```

```

# Функція для обрахунку  $(v_1/c_1)^2$  за формулою (2.32) (знак «+»)
def v1_c1_plus_2(f_in, c_12_in = c_12, L_01_in = L_01,
L_02_in = L_02, l_12_in = l_12) :
    D1 = D1_2(f_in, c_12_in = c_12_in, L_01_in = L_01_in,
L_02_in = L_02_in)
    res = (f_in**4 +
    +(f_in**2)*(L_02_in**2)*((l_12_in**(-2))*(c_12_in**2 - 1) - 2) +
    +(L_01_in**2)*(L_02_in**2)*(l_12_in**2 + (l_12_in**(-2))*
    (c_12_in**2) - 1 - c_12_in**2) + 2*f_in*(L_01_in**2)*np.sqrt(D1))/
    /((f_in**2 - L_02_in**2 + (L_01_in**2)*(c_12_in**2))**2)
    return res

```

```

# Функція для обрахунку  $(v_1/c_1)^2$  за формулою (2.32) (знак «-»)
def v1_c1_minus_2(f_in, c_12_in = c_12, L_01_in = L_01, L_02_in =
L_02, l_12_in = l_12) :
    D1 = D1_2(f_in, c_12_in = c_12_in, L_01_in = L_01_in, L_02_in =
L_02_in)
    res = (f_in**4 +
    +(f_in**2)*(L_02_in**2)*(l_12_in**(-2)*(c_12_in**2 - 1) - 2) +
    +(L_01_in**2)*(L_02_in**2)*(l_12_in**2 + (l_12_in**(-2))*(c_12_in**
    2) - 1 - c_12_in**2) - 2*f_in*(L_01_in**2)*np.sqrt(D1))/
    /((f_in**2 - L_02_in**2 + (L_01_in**2)*(c_12_in**2))**2)
    return res

```

```

# Функція для обрахунку  $(v_2/c_2)^2$  за формулою (2.33) (знак «+»)
def v2_c2_plus_2(f_in, c_12_in = c_12, L_01_in = L_01,
L_02_in = L_02, l_12_in = l_12) :
    D2 = D2_2(f_in, c_12_in = c_12_in, L_01_in = L_01_in,
L_02_in = L_02_in)
    res = (f_in**4 + (f_in**2)*(L_01_in**2)*(l_12_in**2*(c_12_in**
    *(-2) - 1) - 2) + (L_01_in**2)*(L_02_in**2)*(l_12_in**(-2) + (l_12_in**
    2)*(c_12_in**(-2)) - 1 - c_12_in**(-2)) + 2*f_in*(L_02_in**2)*
    np.sqrt(D2))/

```

```

/((f_in**2 - L_01_in**2 + (L_02_in**2) * (c_12_in**(-2)))**2)
return res

# Функція для обрахунку  $(v_2/c_2)^2$  за формулою (2.33) (знак «-»)
def v2_c2_minus_2(f_in, c_12_in = c_12, L_01_in = L_01,
L_02_in = L_02, l_12_in = l_12) :
D2 = D2_2(f_in, c_12_in = c_12_in, L_01_in = L_01_in,
L_02_in = L_02_in)
res = (f_in**4 + (f_in**2) * (L_01_in**2) * (l_12_in**2 * (c_12_in *
*(-2) - 1) - 2) + (L_01_in**2) * (L_02_in**2) * (l_12_in**(-2) + (l_12_in *
*2) * (c_12_in**(-2)) - 1 - c_12_in**(-2)) - 2 * f_in * (L_02_in**2) *
np.sqrt(D2)) /
/((f_in**2 - L_01_in**2 + (L_02_in**2) * (c_12_in**(-2)))**2)
return res

# Визначаємо кількість кроків для k
n_k = 50 # кількість значень k
kk = np.linspace(k_min, k_max, n_k)
# лінійне розбиття значень k від k_min до k_max
# Визначаємо максимальні значення для M і N
Mmax = 100 # Максимальне значення M
Nmax = 500 # Максимальное значение N
# Визначаємо кроки для M і N
stepM = 1 # Крок зміни M
stepN = 1 # Крок зміни N
# Створення масивів для M і N з заданими кроками
M = np.arange(1, stepM * Mmax, stepM)
# Масив значень M від 1 до Mmax з кроком stepM
N = np.arange(1, stepN * Nmax, stepN)
# Масив значень N від 1 до Nmax з кроком stepN

# Створення порожніх списків для збереження результатів розраху-
нів
v1_c1 = [] # Відношення  $v_1/c_1$ 

```

$v2_c2 = []$ # Відношення v_2/c_2

$k_c = []$ # Хвильове число k

$nu_l_01_c1 = []$ # Коефіцієнт $\nu \times l_{01}/c_1$

$nu_l_02_c2 = []$ # Коефіцієнт $\nu \times l_{02}/c_2$

Основний цикл перебору значень k, M, N

for i_k, k in enumerate(kk): # Перебирання значень хвильового числа k

$K = \text{special.ellipk}(k ** 2)$ # Обрахунок повного еліптичного інтегралу першого роду $K(k^2)$

for i, m in enumerate(M): # Перебирання значень M

for j, n in enumerate(N): # Перебирання значень N

Обрахунок частоти f за формулою

$f = 4 * k * K * M[i] / N[j]$

Обрахунок виразів $D1$ і $D2$

$D1 = D1_2(f, c_12_in = c_12, L_01_in = L_01, L_02_in = L_02)$

$D2 = D2_2(f, c_12_in = c_12, L_01_in = L_01, L_02_in = L_{02})$

Мінімальні допустимі значення для v_1/c_1 і v_2/c_2

$v1_c1_min = 0$

$v2_c2_min = 0$

Перевіряємо, щоб $D1$ і $D2$ були додатніми

if $D1 > 0$ and $D2 > 0$:

Обраховуємо можливі значення $(v_1/c_1)^2$ і $(v_2/c_2)^2$

$v1_c1_plus_i_j = v1_c1_plus_2(f, c_12_in = c_12,$

$L_01_in = L_01, L_02_in = L_02, l_12_in = l_12)$

$v1_c1_minus_i_j = v1_c1_minus_2(f, c_12_in = c_12,$

$L_01_in = L_01, L_02_in = L_02, l_12_in = l_12)$

$v2_c2_plus_i_j = v2_c2_plus_2(f, c_12_in = c_12,$

$L_01_in = L_01, L_02_in = L_02, l_12_in = l_12)$

$v2_c2_minus_i_j = v2_c2_minus_2(f, c_12_in = c_12,$

$L_01_in = L_01, L_02_in = L_02, l_12_in = l_12)$

Перевіряємо умови для необхідних значень та формуємо для них масиви

if $v1_c1_min < v1_c1_minus_i_j < 1$ and
 $v2_c2_min < v2_c2_minus_i_j < 1$:
 $v1_c1.append(np.sqrt(v1_c1_minus_i_j))$
 $v2_c2.append(np.sqrt(v2_c2_minus_i_j))$
 $k_c.append(k)$
 $nu_l_01_c1.append(np.sqrt(v1_c1_minus_i_j)/$
 $/(4 * k * K * np.sqrt(1 - v1_c1_minus_i_j)))$
 $nu_l_02_c2.append(np.sqrt(v2_c2_minus_i_j)/$
 $/(4 * k * K * np.sqrt(1 - v2_c2_minus_i_j)))$

if $v1_c1_min < v1_c1_plus_i_j < 1$ and
 $v2_c2_min < v2_c2_minus_i_j < 1$:
 $v1_c1.append(np.sqrt(v1_c1_plus_i_j))$
 $v2_c2.append(np.sqrt(v2_c2_minus_i_j))$
 $k_c.append(k)$
 $nu_l_01_c1.append(np.sqrt(v1_c1_plus_i_j)/$
 $/(4 * k * K * np.sqrt(1 - v1_c1_plus_i_j)))$
 $nu_l_02_c2.append(np.sqrt(v2_c2_minus_i_j)/$
 $/(4 * k * K * np.sqrt(1 - v2_c2_minus_i_j)))$

if $v1_c1_min < v1_c1_minus_i_j < 1$ and
 $v2_c2_min < v2_c2_plus_i_j < 1$:
 $v1_c1.append(np.sqrt(v1_c1_minus_i_j))$
 $v2_c2.append(np.sqrt(v2_c2_plus_i_j))$
 $k_c.append(k)$
 $nu_l_01_c1.append(np.sqrt(v1_c1_minus_i_j)/$
 $/(4 * k * K * np.sqrt(1 - v1_c1_minus_i_j)))$
 $nu_l_02_c2.append(np.sqrt(v2_c2_plus_i_j)/$
 $(4 * k * K * np.sqrt(1 - v2_c2_plus_i_j)))$

if $v1_c1_min < v1_c1_plus_i_j < 1$ and

```

v2_c2_min < v2_c2_plus_i_j < 1 :
v1_c1.append(np.sqrt(v1_c1_plus_i_j))
v2_c2.append(np.sqrt(v2_c2_plus_i_j))
k_c.append(k)
nu_l_01_c1.append(np.sqrt(v1_c1_plus_i_j)/
/(4 * k * K * np.sqrt(1 - v1_c1_plus_i_j)))
nu_l_02_c2.append(np.sqrt(v2_c2_plus_i_j)/(4 * k * K * np.sqrt(1 -
v2_c2_plus_i_j)))

```

```

# Перетворення списків у масиви в NumPy v1_c1 = np.array(v1_c1)
v2_c2 = np.array(v2_c2)
k_c = np.array(k_c)
nu_l_01_c1 = np.array(nu_l_01_c1)
nu_l_02_c2 = np.array(nu_l_02_c2)

```

```

# Перший 3D-графік: залежність  $v_1/c_1$  від  $v_2/c_2$  та  $k$ 
colors = k_c
fig = plt.figure(figsize=(6, 6))
ax = fig.add_subplot(projection='3d')
ax.set_xlabel(" + r' $ v_1/c_1 $", fontsize=20)
ax.set_ylabel(" + r' $ v_2/c_2 $", fontsize=20)
sc = ax.scatter(v1_c1, v2_c2, k_c, c=colors, cmap='jet')
c_bar = plt.colorbar(sc, shrink=0.6)
c_bar.set_label(r'$ k $', fontsize=16, rotation=0)
ax.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=16)
ax.tick_params(axis='both', which='minor', labelsize=16)
c_bar.ax.tick_params(labelsize=16)
plt.tight_layout()
ax.view_init(-140, -30)
plt.show()

```

*# Другий 3D-графік: залежність $(\nu_{SW} * l_{01}/c_1)$ від v_1/c_1 і k*

```
fig = plt.figure(figsize=(6, 6))
ax = fig.add_subplot(projection='3d')
ax.set_xlabel(" + r'$ \nu_{SW} / (l_{01} * c_1) $'", fontsize=20)
ax.set_ylabel(" + r'$ v_1 / c_1 $'", fontsize=20)
sc = ax.scatter(nu_l_01_c1, v1_c1, k_c, c=colors, cmap='jet')
c_bar = plt.colorbar(sc, shrink=0.6)
c_bar.set_label(r'$k$', fontsize = 16, rotation = 0)
ax.tick_params(axis='both', which='major', labelsize = 16)
ax.tick_params(axis='both', which='minor', labelsize = 16)
c_bar.ax.tick_params(labelsize = 16)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

*# Третій 3D-графік: залежність $\nu_{SW} * l_{02}/c_2$ від v_2/c_2 і k* fig =

```
plt.figure(figsize=(6, 6))
ax = fig.add_subplot(projection='3d')
ax.set_xlabel(" + r'$ \nu_{SW} l_{02} / c_2 $'", fontsize = 20)
ax.set_ylabel(" + r'$ v_2 / c_2 $'", fontsize = 20)
sc = ax.scatter(nu_l_02_c2, v2_c2, k_c, c = colors, cmap = 'jet')
c_bar = plt.colorbar(sc, shrink = 0.6)
c_bar.set_label(r'$k$', fontsize = 16, rotation = 0)
ax.tick_params(axis='both', which='major', labelsize = 16)
ax.tick_params(axis='both', which='minor', labelsize = 16)
c_bar.ax.tick_params(labelsize = 16)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Додаток F

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Gorobets O.Yu., Kulish V.V., Syzon I.A., Theory of propagation of nonlinear spin wave through an antiferromagnetic magnonic crystal with four-sublattice interfaces. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2023. Vol. 587, Article ID: 171266. (Приналежність до бази Scopus i Web of Science)

2. Gorobets O.Yu., Kulish V.V., Syzon I.A., Provolovska D.V. Supercritical Propagation of Nonlinear Magnetization Wave Through an Antiferromagnetic Magnonic Crystal. *Vladymyrskyi I., Hillebrands B., Serha A., Makarov D., Prokopenko O. (eds) Functional Magnetic and Spintronic Nanomaterials. NATO 2023. NATO Science for Peace and Security Series B: Physics and Biophysics*. 2024. Dordrecht: Springer, P. 147–175. (Приналежність до бази Scopus)

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

3. Gorobets O.Yu., Kulish V.V., Syzon I.A., Provolovska D.V. Ultrafast propagation of nonlinear spin wave through an antiferromagnetic magnonic crystal. *Proceedings of the XIX international scientific conference «ELECTRONICS AND APPLIED PHYSICS APHYS 2023»*. 2023. Kyiv, Ukraine, October, 17-21, 2023, Taras Shevchenko National University of Kyiv Faculty of RadioPhysics, Electronics and Computer Systems, P. 21.

4. Syzon I., Gorobets O., Kulish V., Supercritical propagation of nonlinear magnetization wave through an antiferromagnetic magnonic crystal. *Book of Abstracts of Bogolyubov Kyiv Conference «Problems of Theoretical and Mathematical Physics» dedicated to the 115-th anniversary of the outstanding theoretician in physics and mathematics Mykola Bogolyubov, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics (Sections 1–4)*. 2024. Kyiv, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, 24–26 September 2024, p. 37.

Апробація матеріалів дисертації

Основні положення дисертації оприлюднені на науково-практичних конференціях: *міжнародних*: «ELECTRONICS AND APPLIED PHYSICS APHYS 2023» (Київ, 2023), Bogolyubov Kyiv Conference «Problems of Theoretical and Mathematical Physics» (Київ, 2024); *наукових семінарах*: кафедри загальної фізики та моделювання фізичних процесів Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» та кафедри загальної фізики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».